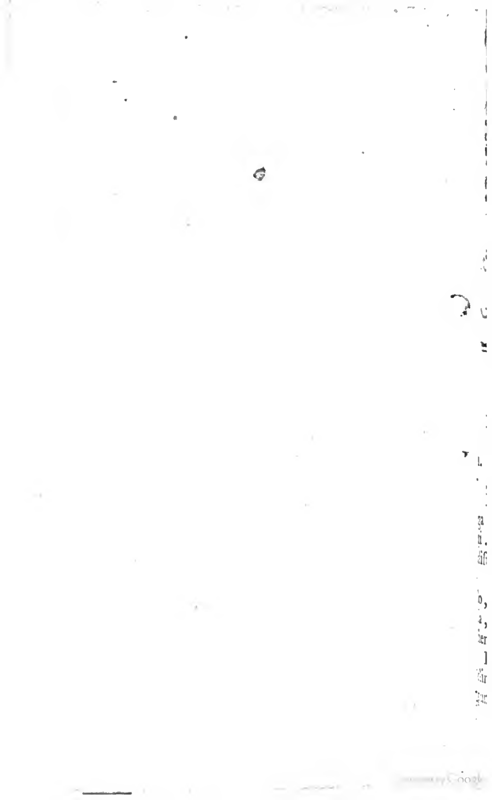






DELLA GEOMETRIA PIANA

LIBRO I.

DEFINIZIONI.

I. IL *Punto* è un ſegno nella grandezza privo di parti.

II. La *Linea* è una grandezza ſolamente lunga. Queſta o in ſe ritorna, o termina in punti. E ſe tra ſuoi punti eſtremi ugualmente ſi diſtende, *Retta* ſi dice.

III. La *Superficie* è una grandezza lunga ſolo, e larga. O queſta altresì ritorna in ſe ſteſſa, o termina in linee. E ſe ugualmente ſi diſtende tra le ſue linee eſtreme, diceſi *Piana*.

IV. L' *Angolo Piano* è la ſcambievole inclinazione di due linee, che s' incontrano in un punto. *Vertice* quel punto; e *Lati* dell' angolo

si dicono le linee. Le quali se rette sono, l'angolo si chiama *Rettilineo*.

V. Se una retta linea fa con un' altra retta due angoli uguali, ciascuno di questi *Retto*; e delle rette una dicesi *Perpendicolare* all'altra. Ma se fa due angoli disuguali, il maggior del retto *Ottuso*; il minore del retto *Acuto*; e delle due rette linee una *Obliqua* all' altra si dice.

VI. La *Figura Piana* è una piana superficie per ogni dove terminata da una, o da più linee.

VII. Il *Cerchio* è una figura piana terminata da una linea curva, alla quale quante rette arrivano dal punto intermedio di essa figura, tutte sono tra se uguali. Il punto intermedio *Centro*; *Circonferenza* la curva; e *Raggi* del cerchio si chiamano le rette uguali, che dal centro pervengono alla circonferenza.

VIII. Il *Diametro* del cerchio è una retta linea tirata per lo centro, che va da una parte e dall' altra a finire nella circonferenza, e divide il cerchio per metà. Quindi la figura terminata dal diametro, e dalla metà della circonferenza dicesi *Semicerchio*.

IX. La figura terminata da sole linee rette si dice *Rettilinea*. *Trilatera*, se da tre; *Quadrilatera*, se da quattro; *Moltilatera*, se da più di quattro rette è terminata.

X. Delle trilatere il *Triangolo Equilatero* ha tutti i lati uguali; l' *Isoscele* ne ha uguali due soli; lo *Scaleno* gli ha tutti disuguali.

XI. Il triangolo in oltre è *Rettangolo*, se contiene un angolo retto; è *Ottusangolo*, se ne contiene

tiene uno ottuso; è *Acutangolo*, se gli ha tutti acuti.

XII. Delle quadrilatere poi il *Quadrato* è equilatero, e rettangolo; il *Bislungo* è rettangolo, ma non equilatero; il *Rombo* è equilatero, ma non rettangolo; il *Romboide* nè rettangolo è, nè equilatero, ha però uguali e i lati, e gli angoli opposti. Fuor di questi ogni altro quadrilatero *Trapezio* si dice.

XIII. Le rette linee *Parallele* sono quelle, che poste nel piano medesimo non vanno mai ad incontrarsi, benchè sino all' infinito da tutte due le parti si estendano. *Parallelogrammo* quindi si chiama il quadrilatero, che ha i lati opposti paralleli.

POSTULATI.

I. Tra due dati punti tirare una linea retta.

II. Prolungare una data retta linea in diretto.

III. Dato il centro, e l' intervallo descrivere un cerchio.

ASSIOMI.

I. Le grandezze uguali a una stessa grandezza sono tra se uguali. E la maggiore, o minore di una delle uguali è altrettanto maggiore, o minore dell' altra.

II. Se a grandezze uguali si aggiungano altre uguali, si avranno tutti uguali. Disuguali però si avranno, se le uguali alle disuguali si aggiungano.

III. Se da grandezze uguali si tolgano altre uguali, le rimanenti saranno uguali. Ma disuguali saranno, se le uguali dalle disuguali si tolgano.

IV. Le grandezze doppie di una grandezza medesima sono tra se uguali, e le triple così, e le quadruple, e le altre moltiplici qualunque dello stesso grado.

V. Uguali tra se parimente sono le metà di una stessa grandezza, le parti terze, le quarte, seguentemente le altre qualunque del grado medesimo.

VI. Il tutto è maggiore d'ogni sua parte. Ed è uguale a tutte le parti sue insieme prese.

VII. Due rette linee non racchiudono spazio.

VIII. Le grandezze, che si combaciano, tra se sono uguali.

IX. Ed uguali tra se sono tutti gli angoli retti.

Gli angoli si dinotano colle lettere al vertice. Quando però a un punto stesso esistono più angoli, si dinota ciascuno con tre lettere, delle quali l'intermedia è quella al vertice, le altre due sono le descritte agli estremi de' lati.

PROPOSIZIONE I.

Sopra una data retta linea terminata costituire un triangolo equilatero.

Tav.I. Fig. 1. Sia la retta AB, su la quale far si debba un triangolo equilatero.

Col centro A, e intervallo AB si descriva il cerchio BCD; col centro B, e intervallo BA si de-

si descriva l'altro ACE (*post.* 3.); e dal punto C, nel quale si segano le circonferenze, si tiri sino ad A la retta CA, sino a B la retta CB (*post.* 1.). Il triangolo ACB sarà il richiesto.

Imperocchè essendo A centro del cerchio BCD, sarà il raggio AC uguale ad AB; ed essendo B centro del cerchio ACE, sarà il raggio BC uguale a BA (*def.* 7.). Dunque alla retta AB è uguale così AC, come BC. Or le grandezze uguali alla medesima sono tra se uguali. Sicchè AC è uguale a BC. Quindi le tre rette CA, AB, BC tra se sono uguali. E quindi il triangolo ACB costituito su la data AB è equilatero (*def.* 10.).

PROPOSIZIONE II.

A un dato punto porre una linea retta uguale a una retta data.

Sia il punto A, al quale por si debba una retta uguale alla data BC. *Fig.* 2.

Si tiri da A a B la retta AB (*post.* 1.); sopra questa si costituisca il triangolo equilatero ADB (*prop.* 1.); i lati DA, DB si prolunghino in diretto verso E, F (*post.* 2.); col centro B, e intervallo BC si descriva il cerchio CGH; e col centro D, e intervallo DG si descriva l'altro GIK (*post.* 3.). La retta AI sarà la richiesta.

Imperocchè essendo D centro del cerchio GIK, sarà la retta DI uguale a DG (*def.* 7.). E di queste la parte DA è uguale a DB (*def.* 10.). Sicchè la rimanente AI sarà uguale alla rimanente

nente BG (*af.* 3.). Ma essendo B centro del cerchio CGH, la retta BC è uguale alla stessa BG. Dunque la retta AI è uguale alla data BC (*af.* 1.).

PROPOSIZIONE III.

Date due rette disuguali togliere dalla maggiore una parte uguale alla minore.

Fig. 3. Sia la maggiore AB, dalla quale toglier si debba una parte uguale alla minore C.

Pongasi al punto A la retta AD uguale a C (*prop.* 2.); e col centro A, e intervallo AD si descriva il cerchio DEF (*post.* 3.). La retta AE sarà la richiesta.

Imperocchè essendo A centro del cerchio DEF, sarà AD uguale ad AE (*def.* 7.). Ma si è posta la stessa AD uguale a C. Dunque la parte AE è uguale alla data C (*af.* 1.).

PROPOSIZIONE IV.

Se due triangoli abbiano uguali un lato ad uno, l' altro all' altro, e gli angoli contenuti da que' lati; avranno uguali le basi, le aree, e i rimanenti angoli, che a' lati uguali si oppongono.

Fig. 4. I triangoli ABC, DEF abbiano uguale il lato AB a DE, l' altro AC a DF, e l' angolo A a D; avranno uguali le basi BC, EF, le aree ABC, DEF, gli angoli B, E opposti a' lati uguali AC, DF, e gli angoli C, F opposti agli altri uguali AB, DE.

Perciocchè se si concepisca il triangolo ABC porsi

porsi sul triangolo DEF, tal che il vertice A cada in D, e il lato AB in DE: caderà ancora il punto B in E per l'uguaglianza de' lati AB, DE; il lato AC in DF per l'uguaglianza degli angoli A, D; e 'l punto C in F per l'uguaglianza de' lati AC, DF. Ma cadendo gli estremi B, C sopra gli estremi E, F; sopra la base EF cader dovrà la base BC; altrimenti se al di fuori questa cadesse, due rette chiuderebbono spazio (*as.* 7.). Anderanno pertanto a combaciarsi e le basi BC, EF; e le aree ABC, DEF, e gli angoli B, E non meno che gli altri C, F. Or le grandezze, che si combaciano, sono uguali. Que' triangoli adunque avranno uguali le basi, le aree, e gli angoli su le basi, che sono incontro a' lati uguali.

PROPOSIZIONE V.

De' triangoli isosceli gli angoli alla base sono uguali; e prolungati i lati uguali saranno ancora uguali gli angoli sotto la base.

Sia il triangolo isoscele ABC, e di esso i lati uguali AB, AC si estendano in diretto verso D, E. Uguali saranno e gli angoli su la base ABC, ACB, e quei di sotto DBC, ECB. *Fig.* 5.

Imperocchè preso in BD un punto qualunque F, e tolta dalla maggiore AE la parte AG uguale ad AF (*pr.* 3.), si conducano le rette CF, BG. E poichè i triangoli ACF, ABG hanno il lato AF uguale ad AG, l' altro AC ad AB, e l'angolo A comune; avranno uguali le basi FC, GB, gli angoli ACF, ABG, gli

altri AFC, AGB (*pr.* 4.). Ma essendo la retta AF uguale ad AG, e di queste la parte AB uguale ad AC; la rimanente FB sarà uguale alla rimanente GC (*as.* 3.). Poichè dunque i triangoli FBC, GCB hanno uguali i lati FB, GC, gli altri FC, GB, e gli angoli BFC, CGB; avranno uguali e gli angoli FBC, GCB, e gli altri FCB, GBC (*pr.* 4.). Questi però sono parti degli angoli dimostrati uguali ACF, ABC. Se pertanto si tolgano, resteranno uguali gli angoli ACB, ABC (*as.* 3.). Ed uguali si son dimostrati gli altri GCB, FBC. Sicchè nel triangolo isoscele sono uguali e gli angoli alla base, e quei, che sotto la base si hanno dal prolungarne i lati uguali.

PROPOSIZIONE VI.

Se un triangolo ha due angoli uguali, avrà uguali i lati, che a quelli si oppongono.

Fig.6. Nel triangolo ABC sia l'angolo ACB uguale a B. Se i lati opposti AB, AC non saranno uguali, un di essi sarà maggiore. Pongasi maggiore AB, e toltane la parte BD uguale a CA (*pr.* 3.), si tiri la retta DC.

Perchè dunque i triangoli BDC, CAB hanno il lato BD uguale a CA, il lato BC comune, e l'angolo B uguale ad ACB; avranno le aree BDC, CAB tra se uguali (*pr.* 4.). Ma l'area BDC è parte di CAB. Sicchè la parte uguaglierà il tutto: la qual cosa ripugnando, ripugna, che AB sia maggiore di AC. Per la stessa ragione ripugna, che sia minore. Dunque nel

nel triangolo ABC i lati AB, AC opposti agli angoli uguali saranno tra se uguali.

PROPOSIZIONE VII.

Da' termini di una retta, tirate due rette, che s' incontrino in un punto, tirar non si potranno verso la parte medesima due altre rette, che s' incontrino in un punto diverso, e sieno uguali ciascuna a ciascuna già tirata dal medesimo termine.

Si congiungano in C le rette AC, BC tirate dagli estremi A, B della retta AB. Se da questi verso la stessa parte a qualunque altro punto tirar si potranno due altre rette ciascuna uguale a ciascuna di quelle, pongasi al punto D arrivare AD uguale ad AC, BD a BC, e si conduca la CD. *Fig.* 7.

Poichè dunque per l'uguaglianza de' lati AC, AD il triangolo ACD è isoscele, sarà l'angolo ACD uguale ad ADC (*pr.* 5.). Ma l' angolo BDC tutto è maggiore di ADC sua parte. Sicchè è ancor maggiore dell'angolo ACD (*as.* 1.). E questo è maggiore dell'angolo BCD (*as.* 6.). Dunque l' angolo BDC è molto maggiore di BCD. Essendo però isoscele il triangolo BDC per l' uguaglianza de' lati BD, BC, l'angolo BDC è uguale a BCD (*pr.* 5.). Laonde gli angoli BDC, BCD sono uguali insieme, e disuguali. Or ciò ripugna. Ripugna pertanto, che a un punto diverso da C possano per la parte stessa tirarsi due rette, una da A uguale ad AC, ed una da B uguale a BC.

PRO-

PROPOSIZIONE VIII.

Se due triangoli abbiano uguali un lato ad uno, l' altro all' altro, e la base alla base, uguali avranno gli angoli compresi da' lati uguali.

*Fig.*8. De' triangoli ABC, DEF sia il lato AB uguale a DE, AC a DF, e la base BC ad EF. Sarà l'angolo A uguale a D.

Imperocchè se si concepisca il triangolo ABC adattarsi su l' altro DEF, in guisa che cada l'estremo B in E, e la base BC in EF; per l'uguaglianza di queste caderà parimente l'estremo C in F. Or se i lati BA, CA non cadessero sopra ED, FD, ma fuori, come in EG, FG; da' termini stessi della retta EF condur si potrebbono due rette, una BA, o EG uguale ad ED, ed una CA, o FG uguale ad FD, il che è assurdo (*pr.* 7.). Caderà adunque BA in ED, CA in FD, e gli angoli A, D tra se converranno. Uguali però sono le grandezze, che si combaciano. Sicchè gli angoli A, D saranno uguali.

PROPOSIZIONE IX.

Dividere per metà un dato angolo rettilineo.

*Fig.*9. Sia l' Angolo BAC, che si debba per metà dividere.

Preso ad arbitrio in AB un punto D; tolta indi dalla maggiore AC la parte AE uguale ad AD (*pr.* 3.); e tirata la DE; sopra essa si costituisca il triangolo equilatero DFE (*p.* 1.).

Si

Si tiri AF ; e questa segherà per mezzo l' angolo BAC.

Imperocchè essendo ne' triangoli ADF, AEF il lato AD uguale ad AE, il lato AF comune, e la base DF uguale ad EF; gli angoli DAF, EAF esser dovranno tra se uguali (*pr.*8.).

PROPOSIZIONE X.

Data una retta linea terminata segarla per metà.

Sia la retta AB, la quale debbasi per metà dividere. *Fig.*10.

Fatto sopra essa il triangolo equilatero ACB (*pr.* 1.); si divida per metà l' angolo ACB colla retta CD (*pr.* 9.). Questa in D segherà per mezzo la data AB.

Perciocchè essendo ne' triangoli CAD, CBD il lato CA uguale a CB, l'altro CD comune, e l'angolo ACD uguale a BCD; esser dovrà la base AD uguale a BD (*pr.* 4.).

PROPOSIZIONE XI.

Sopra una data retta linea da un punto in essa dato innalzare una perpendicolare.

Nella retta AB sia il punto C, dal quale innalzar si debba una perpendicolare su la stessa AB. *Fig.*11.

Preso in AC un punto qualunque D; e tolta da CB la parte CE uguale a CD (*pr.* 3.); si descriva sopra DE il triangolo equilatero DFE (*pr.*1.). Se da C ad F si conduca la retta CF, questa sarà perpendicolare ad AB.

Peroc-

Perocchè i triangoli CDF, CEF avendo il lato CD uguale a CE, il lato CF comune, e la base DF uguale ad EF; avranno uguali gli angoli FCD, FCE (*pr.* 8.). Ma la retta, che con un' altra fa due angoli uguali, è a quella perpendicolare (*def.* 5.). Dunque la retta CF è perpendicolare ad AB.

PROPOSIZIONE XII.

Da un dato punto sublime abbassare una perpendicolare sopra una retta data.

Fig. 12. Su la retta AB dal punto C menar si debba una perpendicolare.

Preso sotto AB un altro punto D ad arbitrio; e descritto col centro C, e intervallo CD il cerchio EDF (*post.* 3.); si seghi la retta EF per metà in G (*pr.* 10.). Se da C a G si tiri la retta CG, si avrà la perpendicolare richiesta.

Imperocchè condotti i raggi CE, CF, ne' triangoli GEC, GFC sarà il lato GE uguale a GF, il lato GC comune, e la base CE uguale a CF (*def.* 7.); onde sarà ancora l' angolo CGE uguale a CGF (*pr.* 8.). La retta però, che fa con un' altra due angoli uguali, è perpendicolare a quella (*def.* 5.). Sicchè la retta CG sarà ad AB perpendicolare.

PROPOSIZIONE XIII.

Se una retta fa con un' altra due angoli, gli farà o retti, o uguali a due retti.

Fig. 13. La retta AB con l'altra CD faccia in B due angoli

angoli ABC, ABD. Se questi sono uguali, saranno retti (*def.* 5.). Se sono disuguali, su la CD s'alzi da B la perpendicolare BE (*pr.* 11.).

E poichè l'angolo EBD uguaglia i due EBA, ABD (*as.* 6.), aggiunto l'altro EBC, i due EBC, EBD uguaglieranno i tre EBC, EBA, ABD, (*as.* 2.). Poichè in oltre l'angolo ABC uguaglia i due EBC, EBA, aggiunto l' altro ABD, i due ABC, ABD uguaglieranno i medesimi tre EBC, EBA, ABD. Ma le grandezze uguali alla medesima sono tra se uguali. Sicchè i due angoli ABC, ABD saranno uguali a i due EBC, EBD. Questi però sono retti (*def.* 5.). Quelli adunque uguaglieranno due retti.

PROPOSIZIONE XIV.

Se due rette tirate dallo stesso punto di un' altra retta per le parti contrarie facciano con questa due angoli uguali a due retti, giaceranno in diretto.

Dal punto A della retta AB tirate le rette AC, AD si abbiano gli angoli BAC, BAD uguali a due retti. Se la retta AC non sarà in diretto con AD, pongasi in diretto esistere con AE. *Fig.* 14.

Farà pertanto la retta BA coll' altra CAE gli angoli BAC, BAE uguali a due retti (*pr.* 13.). E a due retti sono altresì uguali gli angoli BAC, BAD. Sicchè gli angoli BAC, BAE saranno uguali agli altri BAC, BAD (*as.* 1.). Quindi tolto il comune BAC, resterà

rà l' angolo BAE uguale a BAD (*af.* 3.) ; la parte cioè al tutto, il che ripugna (*af.* 6.). E il medefimo affurdo fiegue , fe la CA pongafi in diretto con qualunque altra retta , fuorchè con AD. Per la qual cofa le rette CA, AD giaceranno in diretto.

PROPOSIZIONE XV.

Se due rette fi fègano , faranno uguali gli angoli , che al vertice fi oppongono.

Fig. 15. Si feghino in A le rette BC , DE . Saranno uguali e gli angoli BAD , EAC , e gli altri BAE , DAC tra se al vertice oppofti.

Imperocchè effendo uguali a due retti così gli angoli BAD , DAC , che la retta DA fa con BC ; come gli altri EAC , DAC , che fa la retta CA con DE (*pr.* 13.) : faranno gli angoli BAD , DAC uguali agli altri EAC , DAC (*af.* 1.). Laonde tolto il comune DAC , rimarrà l'angolo BAD uguale ad EAC (*af.* 3.). E nella fteffa maniera fi dimoftrano uguali gli angoli BAE , DAC .

Corollario . Quindi è chiaro, che fe due, o più rette fi feghino, nel punto della fezione faranno gli angoli uguali a quattro retti.

PROPOSIZIONE XVI.

Se di un triangolo fi prolunghi un lato , l' angolo , che fi avrà al di fuori , farà maggiore di ciafcuno degl' interni , ed oppofti .

Fig. 16. Del triangolo ABC fi prolunghi il lato BC in D.

in D. L'angolo esterno ACD sarà maggiore come dell'interno ed opposto A, così di B.

Imperocchè si divida per metà il lato AC in E (*pr.* 10.); si conduca la BEF; e fatta la EF uguale a BE (*pr.* 3.), si tiri la retta CF. E poichè i triangoli EAB, ECF hanno uguali i lati EA, EC, gli altri EB, EF, e gli angoli al vertice AEB, CEF (*pr.* 15.); avranno uguali gli angoli A ed ECF (*pr.* 4.). Ma l'angolo ACD è maggiore di ECF sua parte (*as.* 6.). Dunque è ancor maggiore di A (*as.* 1.). Nella stessa maniera, esteso il lato AC in G, si dimostra l'angolo BCG maggiore di B. Di B adunque è altresì maggiore l'angolo ACD, che uguaglia l'opposto al vertice BCG. *Fig.* 17.

PROPOSIZIONE XVII.

Due angoli di un triangolo sono minori di due retti.

Sia il triangolo ABC. Saranno minori di due retti i due angoli B ed ACB. *Fig.* 18.

Perocchè si prolunghi il lato BC in D. E poichè l'angolo B è minore dell'esterno ACD (*pr.* 16.); aggiunto l'angolo ACB, saranno B ed ACB minori di ACD ed ACB (*as.* 2.). Questi però uguagliano due retti (*p.* 13.). Quelli adunque di due retti saranno minori.

PROPOSIZIONE XVIII.

Ne' triangoli l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore.

Fig.19. Il triangolo ABC abbia il lato AC maggiore di AB. Avrà l'angolo ABC maggiore di C.

Perciocchè tolta da AC la parte AD uguale ad AB (*pr.* 3.); e condotta la BD; sarà nel triangolo isoscele ABD l'angolo ABD uguale ad ADB (*pr.* 5.). Or l'angolo ADB, come esterno del triangolo BCD, è maggiore di C (*pr.* 16.). Pertanto anche l'angolo ABD sarà maggiore di C (*as.* 1.). E l'angolo ABC è maggiore di ABD (*as.* 6.). Sicchè lo stesso ABC sarà molto maggiore di C.

PROPOSIZIONE XIX.

Ne' triangoli il lato opposto all' angolo maggiore è maggiore.

Fig.20. Abbia il triangolo ABC l'angolo B maggiore di C. Avrà il lato AC maggiore di AB.

Altrimenti se AC fosse uguale ad AB; sarebbe l'angolo B uguale a C (*pr.* 5.). E se di AB fosse minore; l'angolo B sarebbe minor di C (*pr.* 18.). Perchè dunque l'uno, e l'altro ripugna, sarà AC maggiore di AB.

PROPOSIZIONE XX.

Di ogni triangolo due lati insieme sono maggiori del terzo.

Fig.21. Sia il triangolo ABC. Se di esso i lati AB, AC insieme si prendano, saranno maggiori di BC.

Imperocchè prolungata la retta BA verso D; e fatta AD uguale ad AC (*pr.* 3.); se si tiri la DC, nel triangolo isoscele ADC sarà l'angolo

golo D uguale ad ACD (*pr.* 5.). Or l'angolo BCD è maggiore di ACD (*as.* 6.). Sicchè lo stesso BCD sarà ancor maggiore di D (*as.* 1.). Quindi nel triangolo DBC il lato BD, come posto incontro all' angolo maggiore, sarà maggiore di BC (*pr.* 19.). Ma per l'uguaglianza delle rette AD, AC il lato BD uguaglia i due BA, AC. Questi adunque presi insieme sono maggiori di BC.

PROPOSIZIONE XXI.

Se due rette tirate dentro un triangolo dagli estremi di un lato s' incontrino in un punto, saranno minori de' lati rimanenti; conterranno però un angolo maggiore.

Dentro il triangolo ABC da B e C si tirino le rette BD, CD. Queste saranno minori de' lati AB, AC; ma comprenderanno l'angolo BDC maggiore di A. *Fig.* 22.

Imperocchè se distendasi la BD fino ad E, sarà nel triangolo EDC il lato DC minore de' due ED, EC (*pr.* 20.). Aggiunta pertanto la DB, saranno DB, DC minori di EB, EC (*as.* 2.). Or poichè nel triangolo ABE il lato EB è minore de' due AB, AE; aggiunta la EC, saranno le stesse EB, EC minori di AB, AC. Dunque le prime DB, DC sono molto minori di AB, AC.

L'angolo BDC al contrario, come fuori del triangolo EDC, è maggiore di DEC (*pr.* 16.). E questo, come fuori del triangolo ABE, è maggiore di A. Sicchè l'angolo BDC è molto maggiore di A.

PROPOSIZIONE XXII.

Di tre date rette, delle quali due qualunque insieme sieno maggiori della rimanente, costituire un triangolo.

Fig.23. Sieno tali rette A, B, C; e far si debba un triangolo, che abbia ciascun lato uguale a ciascuna di esse.

Pongasi una retta DM; da questa si tolga DE uguale ad A, EF a B, FG a C (*pr.3.*); co' centri E, F, ed intervalli ED, FG si descrivano i cerchi DHI, GHL (*post.3.*); e dal punto H, ove si segano le circonferenze, ad E ed F si conducano le rette HE, HF. Il triangolo HEF sarà il richiesto.

Imperocchè essendo uguale ad ED come la retta A, così il raggio EH (*def.7.*); sarà EH uguale ad A (*as.1.*). Ed essendo uguale ad FG come la retta C, così il raggio FH; sarà FH uguale a C. Poichè dunque EF è uguale a B, ciascun lato del triangolo HEF sarà uguale a ciascuna delle rette date.

PROPOSIZIONE XXIII.

Ad un dato punto di una retta data costituire un angolo uguale a un dato angolo rettilineo.

Fig.24. Al punto A della retta AB far si debba un angolo uguale a C.

Tra i lati dell' angolo C tirata la DE, delle tre rette CD, CE, DE si faccia un triangolo, che abbia uguale il lato AF a CD, AG a CE,

FG

FG a DE (*pr.*22.). L'angolo A sarà il richiesto.

Perocchè ne' triangoli AFG, CDE essendo uguali i lati AF, CD, gli altri AG, CE, e le basi FG, DE; sarà l'angolo A uguale a C (*pr.*8.)

PROPOSIZIONE XXIV.

Se in due triangoli sia un lato uguale ad uno, l' altro all' altro, e degli angoli compresi da' lati stessi uno sia maggiore; maggiore sarà la base, che a quello sta incontro.

Ne' triangoli ABC, DEF sia il lato AB uguale a DE, AC a DF, e l'angolo A maggiore di EDF; sarà la base BC maggiore di EF. *Fig.* 25.

Perciocchè fatto al punto D della retta DE l' angolo EDG uguale ad A (*pr.*23.); e presa la DG uguale ad AC (*pr.* 3.); si tirino le rette EG, FG. Ed essendo ad AC uguale così DF, come DG; nel triangolo DFG saranno tra se uguali e i lati DF, DG (*as.* 1.), e gli angoli DFG, DGF (*pr.* 5.). Or l'angolo EFG è maggiore di DFG (*as.* 6.). Dunque è ancor maggiore di DGF (*as.*1.). Questo però è maggiore di EGF (*as.* 6.). Sicchè l'angolo EFG è molto maggiore di EGF; e quindi nel triangolo EFG il lato EG sarà maggiore di EF (*pr.*19.). Ma poichè ne' triangoli ABC, DEG sono uguali i lati AB, DE, gli altri AC, DG, e gli angoli A, EDG; sarà la base BC uguale ad EG (*pr.* 4.). Siccome EG adunque, così la base BC sarà maggiore di EF (*as.* 1.).

PROPOSIZIONE XXV.

Se in due triangoli sia un lato uguale ad uno, l' altro all' altro, e delle basi una sia maggiore; l' angolo, che a quella sta incontro, sarà maggiore.

Fig.26. Ne' triangoli ABC, DEF sia il lato AB uguale a DE, AC a DF, e la base BC maggiore di EF. Sarà l' angolo A maggiore di D.

Altrimenti se A fosse uguale a D, la base BC sarebbe uguale ad EF (*pr.* 4.). E se fosse minore, sarebbe BC minore di EF (*pr.*24.). Perchè dunque l' uno e l' altro ripugna, sarà l'angolo A maggiore di D.

PROPOSIZIONE XXVI.

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad uno, l' altro all' altro, ed uguali o i lati intermedj, o due degli opposti agli angoli uguali; avranno uguali e i rimanenti angoli, e i lati rimanenti, che agli angoli uguali stanno incontro.

Fig.27. I triangoli ABC, DEF abbiano uguali gli angoli B, E, gli altri C, EFD, e in primo luogo i lati intermedj BC, EF. Avranno uguali gli angoli A, EDF, i lati AC, DF, gli altri AB, DE.

Imperocchè se questi fieno disuguali, un di essi sarà maggiore. Sia DE, e tolrane la parte EG uguale a BA (*pr.* 3.), si conduca la GF. Ne' triangoli BAC, EGF adunque per l'uguaglianza de' lati BA, EG, degli altri BC, EF, e degli angoli B, E sarà l'angolo C uguale ad EFG (*pr.*4.). Ma lo stesso C è uguale ad EFD.

Sic-

Sicchè l'angolo EFG sarà uguale ad EFD (*as.*1.). La qual cosa ripugnando (*as.* 6.), siegue che i lati BA, ED non sieno disuguali. Quindi sono uguali. E quindi avendo i triangoli BAC, EDF il lato BA uguale ad ED, l'altro BC ad EF, e l'angolo B ad E; avranno uguali gli angoli A, EDF, e i lati AC, DF (*pr.*4.).

Que' triangoli ora abbiano uguali i lati BA, ED posti incontro agli angoli uguali C, EFD. E se disuguali sieno i lati BC, EF, un di essi sarà maggiore. Sia EF, e toltane la parte EH uguale a BC, si tiri la DH. Pertanto ne' triangoli BAC, EDH essendo uguali i lati BA, ED, gli altri BC, EH, e gli angoli B, E; sarà l'angolo C uguale ad EHD (*pr.*4.). Lo stesso C però è uguale ad EFD. Dunque l'angolo EHD fuori del triangolo DFH sarà uguale all' opposto interno EFD (*as.* 1.). Ma ciò ripugna (*pr.* 16.). Sicchè i lati BC, EF non saranno disuguali. Sono dunque uguali. Laonde avendo i triangoli BAC, EDF il lato BA uguale ad ED, l'altro BC ad EF, e l'angolo B ad E; avranno uguali e gli angoli A, EDF, e i lati AC, DF (*pr.*4.).

PROPOSIZIONE XXVII.

Le rette, tra le quali cadendo un' altra retta fa uguali gli angoli alterni, sono parallele.

Tra le rette AB, CD cada EF, e faccia gli angoli alterni AEF, EFD tra se uguali. Parallele saranno le rette AB, CD. TAV.II. *Fig.* 1.

Altrimenti prolungate anderebbono ad incon-

trarsi. S' incontrino in G. E l'angolo AEF fuori del triangolo GEF sarà maggiore dell'opposto interno EFG (*pr.* 16.). Gli è però uguale. Poichè dunque ciò è assurdo, le rette AB, CD saranno parallele (*def.* 13.).

PROPOSIZIONE XXVIII.

Parallele sono le rette, tra le quali cadendo un' altra fa o l' angolo esterno uguale all' interno opposto dalla parte stessa, o gl' interni dalla stessa parte uguali a due retti.

TAV.II. *Fig.*2. Cada la retta EG tra le due AB, CD, e faccia l' esterno angolo EFB uguale all' interno opposto dalla medesima parte FGD; o vero gli angoli interni dalla parte medesima BFG, FGD uguali a due retti. Le due AB, CD saranno parallele.

Imperocchè nel primo caso essendo all'angolo EFB uguale così l'interno FGD, come l'opposto al vertice AFG (*pr.* 15.); sarà l'angolo AFG uguale all'alterno FGD (*as.* 1.). Onde la retta AB sarà parallela a CD (*pr.*27.).

E nell' altro essendo uguali a due retti così gli angoli AFG, BFG (*pr.* 13.), come gli altri BFG, FGD; saranno i due AFG, BFG uguali a i due BFG, FGD (*as.* 1.). Tolto adunque il comune BFG resterà l' angolo AFG uguale all' alterno FGD (*as.* 3.); onde sarà la retta AB parallela a CD (*pr.* 27.).

CoROL. Quindi parallele non sono le rette, tra le quali cadendo un' altra fa gli angoli interni dalla parte stessa minori di due retti; altrimenti a due

a due retti far gli dovrebbe uguali, se quelle fossero parallele.

Ciò essendo, tali rette verso qualche parte distese incontrar certamente si dovranno. Distendendosi però verso la parte degli angoli maggiori di due retti, l'una sempre più dall'altra si allontana. Distese pertanto verso la parte, che riguarda gli angoli minori di due retti, anderanno finalmente ad incontrarsi.

PROPOSIZIONE XXIX.

La retta, che cade tra le parallele, fa con esse gli angoli alterni uguali; l'esterno uguale all'interno opposto dalla stessa parte; e gl'interni dalla parte stessa uguali a due retti.

Cada tra le parallele AB, CD la retta EG. Farà con quelle l'angolo AFG uguale all'alterno FGD; l'esteriore EFB uguale all'interno opposto dalla parte medesima FGD; e i due interni dalla medesima parte BFG, FGD uguali a due retti. TAV. II. *Fig.* 2.

Imperocchè se gli angoli AFG, FGD sieno disuguali, sia maggiore AFG; e aggiunto l'angolo BFG saranno i due AFG, BFG maggiori de' due BFG, FGD (*as.* 2.). Ma i due AFG, BFG uguagliano due retti (*pr.* 13.). Dunque i due BFG, FGD saranno minori di due retti; onde le rette AB, CD non saranno parallele (*cor. prec.*). Ciò ripugna. Dunque gli angoli AFG, FGD non saranno disuguali, ma uguali.

Or l'angolo AFG uguaglia l' opposto al vertice EFB (*pr.* 15.). Per la qual cosa l'angolo EFB sarà uguale ad FGD (*as.* 1.).

Si aggiunga a questi il comune BFG, e saranno i due EFB, BFG uguali a i due BFG, FGD (*as.* 2.). A due retti però sono uguali i due EFB, BFG (*pr.* 13.). Sicchè i due BFG, FGD a due retti parimente saranno uguali (*as.* 1.).

PROPOSIZIONE XXX.

Le rette parallele alla medesima sono tra se parallele.

TAV.II. *Fig.* 3. Alla stessa EF sia parallela e la retta AB, e l'altra CD. Sarà AB parallela a CD.

Perciocchè si tiri tra esse la GI. Ed essendo AB parallela ad EF, l'angolo AGH uguaglierà l'alterno GHF (*pr.* 29.). Essendo poi EF parallela a CD, lo stesso GHF esterno uguaglierà l'interno opposto dalla parte stessa HID (*pr.* 29.). Dunque l'angolo AGH uguaglierà l'altro HID (*as.* 1.). Questi però sono alterni tra le rette AB, CD. Sicchè le rette AB, CD sono tra se parallele (*pr.* 27.).

PROPOSIZIONE XXXI.

Per un dato punto tirare una retta parallela a una retta data.

TAV.II. *Fig.* 4. Sia il punto A, per lo quale si debba condurre una retta parallela a BC.

Il punto A si congiunga con uno qualunque D della retta BC; alla retta AD nel punto A si costituisca l'angolo EAD uguale ad ADC (*pr.* 23.); si estenda la EA in F; e si avrà la parallela richiesta.

Im-

Imperciocchè essendo l'angolo EAD uguale all'alterno ADC, sarà la retta EF parallela a BC (*pr.* 27.).

PROPOSIZIONE XXXII.

In ogni triangolo l' angolo esterno uguaglia i due interni ed opposti; e i tre angoli interni insieme uguagliano due retti.

Del triangolo ABC si prolunghi il lato BC verso D. Sarà l'angolo esterno ACD uguale a i due A, B; e i tre interni A, B, ACB saranno uguali a due retti. Tav. II. *Fig.* 5.

Perocchè se al punto C pongasi la CE parallela ad AB (*pr.* 31.), si avrà l' angolo ACE uguale all'alterno A; e l' esterno ECD uguale all' interno opposto dalla parte stessa B (*pr.* 29.). Dunque tutto l' angolo ACD uguaglierà i due A, B.

A questi uguali aggiungasi il comune ACB, e saranno i tre angoli A, B, ACB uguali a i due ACD, ACB (*as.* 2.). Ma i due ACD, ACB uguagliano due retti (*pr.* 13.). Dunque anche i tre A, B, ACB uguaglieranno due retti (*as.* 1.).

Corol. I. Quindi il triangolo, che ha un angolo ottuso, ha gli altri insieme minori di un retto. Quello, che ha un angolo retto, ha gli altri insieme uguali a un retto. E l'isoscele, che ha retto l' angolo al vertice, ha semiretti gli uguali alla base. E quello, che ha un angolo uguale a i due rimanenti, lo ha retto.

II. Se dallo stesso punto sublime sopra una retta

retta cada una perpendicolare, e un'altra retta; facendo quella angolo retto, l'altra far lo dovrà acuto. Onde da un punto in una retta abbassar non si può, che una sola perpendicolare; e questa cade sempre verso la parte dall'angolo acuto fatto dall'obliqua; ed è la più breve di quante arrivar possano da un punto sublime su la retta medesima.

Tav.II. *Fig.6.* III. Poichè gli angoli del triangolo equilatero sono tra se uguali, ciascuno conterrà due terze parti di un retto. Perciò se sopra il lato AB dell' angolo retto CAB si descriva il triangolo equilatero ADB, e colla retta AE per metà si divida l' angolo DAB, si avrà la trisezione dell' angolo retto, che sola aver si può geometricamente.

IV. I tre angoli insieme di un triangolo sono uguali a i tre insieme di ogni altro. Per la qual cosa se due triangoli abbiano due angoli comunque uguali a due, avranno il rimanente uguale al rimanente.

Tav.II. *Fig.7.* V. Se da un punto A preso dentro una figura rettilinea si tirino delle rette a tutti gli angoli di essa, si dividerà la figura in tanti triangoli, quanti ha lati. Perchè dunque gli angoli di un triangolo uguagliano due retti, quei di tutti uguaglieranno due volte tanti retti, quanti sono della figura i lati. Ma gli angoli al punto A sono uguali a quattro retti (*cor. pr.* 15.), e i rimanenti compongono gli angoli della figura. Sicchè tutti gli angoli di una figura rettilinea uguaglieranno due volte tanti retti, quanti sono della figura i lati, meno quattro.

VI.

VI. E poichè di ogni figura rettilinea tutti gli angoli interni insieme, ed esterni sono uguali due volte a tanti retti, quanti ha lati la figura (*pr.* 13.); se gl' interni si tolgano, tutti gli esterni insieme saranno uguali a quattro retti. TAV. II. *Fig.* 8.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Uguali, e parallele sono le rette, che dalla stessa parte congiungono le uguali, e parallele.

Le rette AB, CD uguali, e parallele verso la parte medesima si congiungano dalle altre AC, BD. Ancor queste uguali tra se saranno, e parallele. TAV. II. *Fig.* 9.

Perciocchè tirata la retta AD, si avrà tra le parallele AB, CD l'angolo BAD uguale all'alterno ADC (*pr.* 29.). Poichè dunque i triangoli ABD, DCA hanno il lato AD comune, e uguali i lati AB, DC, non meno che gli angoli BAD, ADC; avranno uguali e le basi AC, BD, e gli angoli CAD, ADB (*pr.* 4.): Ma questi sono alterni tra le rette AC, BD. Dunque le rette uguali AC, BD saranno ancora parallele (*pr.* 27.).

PROPOSIZIONE XXXIV.

Ogni parallelogrammo ha uguali gli opposti lati, e gli angoli opposti, e dal diametro per metà si divide.

Sia il parallelogrammo ABDC. Avrà questo uguali così i lati, come gli angoli opposti, e dal diametro AD sarà per metà diviso. TAV. II. *Fig.* 10.

Im-

Imperciocchè essendo tra le parallele AB, CD uguali gli angoli alterni BAD, ADC, ed uguali gli alterni BDA, DAC tra le parallele AC, BD (*pr.* 29.); sarà tutto l'angolo BAC uguale all'opposto BDC (*as.* 2.). E ne' triangoli ABD, ACD essendo uguali gli angoli BAD, ADC, gli altri BDA, DAC, e il lato intermedio AD comune; saranno uguali gli opposti lati AB, CD, gli altri BD, AC, gli angoli opposti B, C (*pr.* 26.), e quindi anche le aree ABD, ACD (*pr.* 4.), nelle quali il parallelogrammo ABDC dal diametro AD vien diviso.

PROPOSIZIONE XXXV.

I parallelogrammi posti su la medesima base, e tra le parallele medesime sono tra se uguali.

Tav.II. *Fig.* 11. Sieno i parallelogrammi ABCD, EBCF sopra la base BC, e tra le parallele AF, BC. Questi tra se saranno uguali.

Perciocchè essendo uguale a BC così AD, come EF (*pr.* 34.); sarà AD uguale ad EF (*as.* 1.). Onde aggiunta la DE sarà AE uguale a DF (*as.* 2.). Ma AB è uguale a DC (*pr.* 34.); e l'angolo A all'esterno FDC (*pr.* 29.). Sicchè i triangoli ABE, DCF avendo uguali i lati AE, DF, gli altri AB, DC, e gli angoli A, FDC; avranno uguali le aree ABE, DCF (*pr.* 4.). Tolgasi la parte comune DOE; e resteranno i trapezj ABOD, EOCF tra se uguali (*as.* 3.). Si aggiunga a questi il triangolo BOC; e si avrà il parallelogrammo ABCD uguale all'altro EBCF (*as.* 2.).

PRO-

PROPOSIZIONE XXXVI.

I parallelogrammi fatti sopra basi uguali, e tra le stesse parallele sono uguali.

Sieno i parallelogrammi ABCD, EFGH su le basi uguali BC, FG, e tra le parallele medesime AH, BG. Saranno questi tra se uguali. TAV.II. *Fig.* 12.

Perciocchè si tirino le rette BE, CH. Ed essendo ad FG uguale così BC, come EH (*pr.* 34.); sarà BC uguale ad EH. Ma BC è parallela ad EH. Dunque le rette BE, CH, che le congiungono, ancor esse saranno parallele (*pr.* 33.); onde il quadrilatero EBCH sarà parallelogrammo (*def.* 13.). Questo però è tra le stesse parallele e su la stessa base BC col parallelogrammo AC, su la stessa base EH col parallelogrammo EG. Poichè dunque al medesimo EC è uguale e il parallelogrammo AC, e l'altro EG (*pr.* 35.), sarà il parallelogrammo AC uguale ad EG.

PROPOSIZIONE XXXVII.

I triangoli fatti su la base stessa, e tra le stesse parallele sono tra se uguali.

I triangoli ABC, DBC esistano su la base BC, e tra le parallele AD, BC. Saranno uguali. TAV.II. *Fig.* 13.

Perocchè se da' punti B, C si conducano le rette BE parallela a CA, CF a BD (*pr.* 31.); e da ambedue le parti distendasi la retta AD, finchè le incontri in E ed F; si avranno i parallelogrammi EC, FB (*def.* 13.), i quali perchè

chè posti su la base BC, e tra le parallele EF, BC, saranno uguali (*pr.*35.). Sono però divisi da' diametri AB, DC. Conciossiachè dnnque son divisi per mezzo (*pr.* 34.), i triangoli ABC, DBC saranno le metà de' parallelogrammi uguali EC, FB; laonde saranno uguali (*as.* 5.).

PROPOSIZIONE XXXVIII.

I triangoli posti sopra basi uguali, e tra le parallele medesime sono uguali.

TAV.II. *Fig.*14. Su le basi uguali BC, EF esistano i triangoli ABC, DEF tra le parallele AH, BF. Saranno uguali.

Imperocchè se da' punti C, F si tirino le rette CG parallela a BA, ed FH ad ED (*pr.*31.); si avranno i parallelogrammi BG, EH, i quali perchè fatti sopra le basi uguali BC, EF, e tra le parallele AH, BF, uguali saranno (*pr.*36.). Sono però di essi le metà i triangoli ABC, DEF (*pr.* 34.). Sicchè ancor questi saranno tra se uguali (*as.* 5.).

PROPOSIZIONE XXXIX.

I triangoli uguali posti su la medesima base verso la parte medesima esistono tra le stesse parallele.

TAV.II. *Fig.*15. Sieno i triangoli ABC, DBC tra se uguali, e su la base BC, e dalla parte stessa. La retta AD, che ne congiugne i vertici, sarà parallela a BC.

Altrimenti pongasi a BC parallela una retta diversa AE, e si tiri la CE. Perchè dunque i triangoli ABC, EBC sono su la base BC, e

tra

tra le parallele AE, BC saranno uguali (*pr*.37.). Ma uguali ancor sono i triangoli ABC, DBC. Sicchè uguali saranno i triangoli EBC, DBC (*as*.1.); la parte cioè, e il tutto, il che ripugna (*as*. 6.). Ripugna quindi, che AE sia parallela a BC. E lo stesso di ogni altra retta avviene, fuorchè della sola AD. Dunque AD sarà parallela a BC.

PROPOSIZIONE XL.

I triangoli uguali fatti sopra basi uguali verso la parte medesima esistono tra le medesime parallele.

Sieno i triangoli ABC, DCE ed uguali, e su le basi uguali BC, CE, e dalla stessa parte. Se la retta AD ne congiunga i vertici, sarà parallela a BE. TAV.II. *Fig*.16.

Altrimenti sia a BE parallela una retta diversa AF, e si tiri la FE. Essendo pertanto i triangoli ABC, FCE su le basi uguali BC, CE, e tra le parallele AF, BE, saranno uguali (*pr*. 38.). Uguali però sono i triangoli ABC, DCE. Dunque uguali saranno i triangoli FCE, DCE (*as*.1.); il che è assurdo (*as*. 6.). Or siegue l'assurdo medesimo, se ogni altra retta pongasi parallela a BE, fuorchè la sola AD. Per la qual cosa AD sarà parallela a BE.

PROPOSIZIONE XLI.

Il parallelogrammo è doppio del triangolo posto su la base stessa, e tra le stesse parallele. TAV.II.

Tra le parallele AE, BC sopra la base BC *Fig*. 17.

esi-

esistano il parallelogrammo BD, e 'l triangolo EBC. Il parallelogrammo BD sarà doppio del triangolo EBC.

Perciocchè tirata l'AC si avranno i triangoli ABC, EBC tra se uguali, come fatti su la base BC, e tra le parallele AE, BC (*pr.* 37.). Ma il parallelogrammo BD è doppio di un di essi ABC (*pr.* 34.). Dunque sarà ancor doppio dell'altro EBC (*as.* 1.).

PROPOSIZIONE XLII.

In un dato angolo costituire un parallelogrammo uguale a un triangolo dato.

TAV. II. *Fig.* 18. Al triangolo ABC far si debba un parallelogrammo uguale in un angolo uguale a D.

Divisa per mezzo la BC in E (*pr.* 10.), e fatto al punto E della retta EC l'angolo CEF uguale a D (*pr.* 23.); si tiri da A la retta AG parallela a BC, da C la CG parallela ad EF (*pr.* 31.). Il parallelogrammo EG sarà il richiesto.

Imperocchè si conduca la retta AE. E poichè i triangoli ABE, ACE fatti su le basi uguali BE, CE, e tra le parallele AG, BC, sono uguali (*pr.* 38.); l'intero ABC sarà doppio del solo ACE. Ma del medesimo ACE è altresì doppio il parallelogrammo EG fatto su la base stessa EC, e tra le stesse parallele AG, EC (*pr.* 41.). Dunque il parallelogrammo EG sarà uguale al triangolo ABC (*as.* 4.).

PRO-

PROPOSIZIONE XLIII.

In ogni parallelogrammo i compimenti di que' parallelogrammi, che esistono intorno al diametro, sono tra se uguali.

Nel parallelogrammo BD per un punto O del diametro sia tirata GH parallela ad AD, EF ad AB. I parallelogrammi GE, FH giaceranno intorno al diametro AC; gli altri GF, EH, che di quelli sono i compimenti all'intero BD, tra se saranno uguali. TAV.II. *Fig.19.*

Imperocchè essendo AC diametro del parallelogrammo BD, AO di GE, OC di FH; saranno uguali e gl'interi triangoli ABC, ADC, e le parti di essi AGO, AEO non meno che le altre CFO, CHO (*pr.34.*). Se queste pertanto da' loro tutti si tolgano, uguali resteranno i parallelogrammi GF, EH compimenti all' intero BD.

PROPOSIZIONE XLIV.

A una data retta applicare un parallelogrammo uguale a un dato triangolo in un angolo dato.

Sia la retta AB, il triangolo C, l' angolo D; e applicar si debba alla retta AB un parallelogrammo uguale al triangolo C in un angolo uguale a D. TAV.II. *Fig.20.*

Fatto il parallelogrammo EB uguale al triangolo C nell'angolo FBG uguale a D (*pr.42.*); e posto il lato GB in diretto con BA; si tiri per A ad FB o ad EG la parallela AH (*pr.* 31.).

31.). Or se distendasi EF sino ad H, gli angoli E, EHA uguaglieranno due retti (*pr.*29.). Laonde se si conduca HB, gli angoli E, EHB di due retti saranno minori; e quindi prolungando verso G le rette EG, HB, incontrar si dovranno in un punto I (*cor. pr.* 28.). Per I si tiri ad EH la parallela IL, e le parallele HA, FB si estendano sino ad L ed M. Il parallelogrammo AM applicato alla data AB sarà il richiesto.

Imperocchè essendo all'angolo FBG uguale come il dato D, così l'opposto al vertice ABM (*pr.*15.), sarà l'angolo ABM uguale a D. Ed essendo tra se parallele come le rette EI, FM, HL, così le altre EH, GA, IL (*pr.* 30.); nel parallelogrammo EL sarà il compimento AM uguale ad EB (*pr.*43.). Perchè dunque al triangolo C è uguale lo stesso EB, sarà il parallelogrammo AM uguale al triangolo C.

PROPOSIZIONE XLV.

In un dato angolo fare un parallelogrammo uguale a un rettilineo dato.

Tav. II. Fig. 21. Al rettilineo AB far si debba un parallelogrammo uguale in un angolo uguale a C.

Diviso in triangoli il rettilineo, si costituisca il parallelogrammo DE uguale al triangolo A nell'angolo DFE uguale a C (*pr.* 42.); e alla retta GE nell'angolo HEG uguale allo stesso C si applichi il parallelogrammo EI uguale al triangolo B (*pr.*44.). La figura DH sarà il richiesto parallelogrammo.

Per-

Perciocchè essendo allo stesso C uguali gli angoli DFE, HEG, saranno tra se uguali; onde aggiunto il comune FEG, saranno i due DFE, FEG uguali a i due FEG, HEG. Ma i due DFE, FEG uguagliano due retti (*pr.* 29.). Sicchè i due FEG, HEG ancor essi uguaglieranna due retti; e perciò le rette FE, EH giaceranno in diretto (*pr.* 14.). Essendo però uguali gli angoli DGE, GEH alterni tra le parallele DG, FH, se aggiungasi il comune IGE, saranno i due DGE, IGE uguali a i due IGE, GEH. Siccome questi adunque uguagliano due retti (*pr.* 29.), così gli altri DGE, IGE a due retti saranno uguali; e perciò in diretto esisteranno le rette DG, GI (*pr.* 14.). Or poichè a GE è parallela ed uguale tanto DF, quanto IH (*pr.* 34.), le rette DF, IH saranno uguali (*as.* 1.) e parallele (*pr.* 30.). Uguali pertanto e parallele essendo le altre DI, FH, che le congiungono (*pr.* 33.), sarà DH un parallelogrammo. E di esso la parte DE è uguale al triangolo A, l'altra EI a B. Dunque il parallelogrammo DH, fatto nell'angolo F uguale a C sarà uguale al rettilineo AB.

PROPOSIZIONE XLVI.

Sopra una data retta linea descrivere un quadrato.

Sia la retta AB, su la quale debbasi descrivere un quadrato. Tav. II. *Fig.* 22.

Innalzata su di essa dal punto A la perpendicolare AC (*pr.* 11.); e fatta AC uguale ad

AB (*pr.* 3.); da' punti C, B si tirino le rette CD parallela ad AB, BD ad AC (*pr.* 31.). Il parallelogrammo AD sarà il quadrato della retta AB.

Perciocchè essendo i lati CD, BD uguali agli opposti AB, AC (*pr.* 34.), ed AB, AC tra se uguali; uguali saranno i quattro lati AB, AC, CD, DB (*as.* 1.). Or essendo gli angoli A, C tra le parallele uguali a due retti (*pr.* 29.), e retto l' angolo A fatto dalla perpendicolare; anche C sarà retto. Poichè dunque retti esser debbono gli angoli D, B opposti a quelli (*pr.* 34.); il parallelogrammo AD non solo sarà equilatero, ma altresì rettangolo; onde sarà il quadrato di AB.

Corol. Quindi è chiaro, che uguali sieno come i quadrati di uguali lati, così i lati di quadrati uguali, e che rettangolo sia il parallelogrammo, il quale ha un angolo retto.

PROPOSIZIONE XLVII.

In ogni triangolo rettangolo il quadrato del lato posto incontro all' angolo retto uguaglia i quadrati de' lati rimanenti.

Tav.II. *Fig.* 23. Sia il triangolo ABC rettangolo in A. Se sopra i lati BC, AB, AC si descrivano i quadrati BE, BF, CH, sarà il solo BE uguale a i due BF, CH insieme presi.

Imperocchè tirate le rette GC, AD, dal punto A si tiri AL parallela a BD (*pr.* 31.). E poichè gli angoli BAF, BAC sono due retti, in diretto giaceranno le rette FA, AC (*pr.* 14.).

Per-

Perchè in oltre gli angoli DBC, GBA, come retti, sono uguali (*as.* 9.); aggiunto il comune ABC, tutto l'angolo DBA sarà uguale a GBC. Perchè dunque i triangoli BAD, BGC hanno uguali i lati BA, BG, gli altri BD, BC, e gli angoli DBA, GBC, avranno uguali le aree BAD, BGC (*pr.* 4.). Or il parallelogrammo BL è doppio dell' area triangolare BAD posta su la stessa base BD e tra le parallele stesse AL, BD; ed il quadrato BF è doppio dell'altra BGC posta con esso su la base BG e tra le parallele FC, GB (*pr.* 41.). Sicchè il parallelogrammo BL uguaglierà il quadrato BF (*as.* 4.). Similmente condotte le rette BI, AE dimostrerassi il parallelogrammo CL uguale al quadrato CH. Aggiugnendo pertanto uguali ad uguali, sarà il quadrato BE uguale a i due BF, CH.

PROPOSIZIONE XLVIII.

Se in un triangolo il quadrato di un lato uguaglia i quadrati de' lati rimanenti, que' rimanenti lati conterranno un angolo retto.

Nel triangolo ABC sia il quadrato di BC uguale a i due di BA, e di AC. L' angolo BAC sarà retto. TAV. II. *Fig.* 24.

Imperocchè alzata sopra AC dal punto A la perpendicolare AD (*pr.* 11.); e fatta AD uguale ad AB (*pr.* 3.); si congiunga la DC. Ed essendo per l'uguaglianza de' lati AB, AD uguali i quadrati di AB, e di AD (*cor. pr.* 46.); se a questi aggiungasi il quadrato di AC, saranno i due di AB, e di AC uguali a i due

 di

di AD, e di AC. Ma i due di AB, e di AC uguagliano il quadrato di BC; e per l'angolo retto CAD i due di AD, e di AC uguagliano quello di DC (*pr.*47.). Sicchè il quadrato di BC uguaglierà quello di DC (*as.* 1.). Quindi il lato BC sarà uguale a DC (*cor. pr.* 46.). E quindi ne' triangoli ABC, ADC essendo il lato AC comune, l' altro AB uguale ad AD, e la base BC a DC; sarà l' angolo BAC uguale a DAC (*pr.* 8.). Ma l' angolo DAC fatto dalla perpendicolare è retto. Dunque l' angolo BAC ancor esso sarà retto.

L I B R O II.

DEFINIZIONI.

I. Il parallelogrammo rettangolo dicesi compreso da' lati, che contengono l' angolo retto.

II. In ogni parallelogrammo uno qualunque di quei, che intorno al diametro esistono, insieme co' due compimenti, si chiama *Gnomone.*

PROPOSIZIONE I.

Il rettangolo compreso da due rette uguaglia quei, che si comprendono da una di esse, e da ciascuna delle parti, nelle quali l' altra comunque è divisa.

Tav.III. *Fig.* 1. Sia una retta A, ed una BC segata comunque in D, ed E. Sarà il rettangolo contenuto da A e da BC uguale a quei, che si conten-

tengono da A e BD, da A e DE, da A ed EC.

Perciocchè innalzata dal punto B la BF perpendicolare a BC (*pr.* 11. 1.), e fatta la stessa BF uguale ad A; se da F si tiri la FG parallela a BC, e da' punti D, E, C le rette DH, EI, CG parallele a BF (*pr.* 31. 1.); si avrà il rettangolo FC contenuto da BF e BC uguale a' rettangoli FD, HE, IC, che si contengono da BF e BD, da DH e DE, da EI ed EC. Or DH, ed EI sono uguali a BF (*pr.* 34. 1.), e questa è uguale ad A. Sicchè il rettangolo compreso da A e BC uguaglierà quei, che si comprendono da A e BD, da A e DE, da A ed EC.

PROPOSIZIONE II.

Il quadrato di una retta comunque segata in un punto uguaglia i rettangoli contenuti dalla retta medesima, e da ciascuna delle sue parti.

Sia la retta AB segata ad arbitrio in C. Sarà il quadrato di AB uguale a' rettangoli, che si contengono da AB ed AC, da AB e BC. TAV. III. *Fig.* 2.

Perciocchè descritto sopra AB il quadrato AD (*pr.* 46. 1.), e condotta da C la CF parallela a BD (*pr.* 31. 1.); si avrà il quadrato AD uguale a' rettangoli AF, FB compresi da AE ed AC, da BD e BC. Ma i lati del quadrato AE e BD sono uguali ad AB. Dunque il quadrato di AB sarà uguale a' rettangoli di AB ed AC, di AB e BC.

PROPOSIZIONE III.

Il rettangolo compreso da una retta segata comunque in un punto, e da una delle parti sue, uguaglia il quadrato della parte stessa, e il rettangolo di ambedue le parti.

Tav.III. Sia la retta AB divisa ad arbitrio in C. Sarà il rettangolo fatto da AB e BC uguale al quadrato di BC, e al rettangolo, che si fa da AC e CB.
Fig.3.

Imperocchè descritto su la CB il quadrato CD (*pr.*46.1.), e tirata da A a CE la parallela AF (*pr.*31.1.); se si distenda la DE, finchè l'incontri in F, si avrà il rettangolo FB contenuto da AB e BD uguale al quadrato CD, e al rettangolo CF, che da AC e CE si contiene. Del quadrato però i lati BD e CE sono uguali a CB. Sicchè il rettangolo fatto da AB e CB sarà uguale al quadrato di BC, e al rettangolo di AC e CB.

PROPOSIZIONE IV.

Il quadrato di una retta divisa ad arbitrio in un punto uguaglia i quadrati delle parti, e due rettangoli, che dalle parti medesime si comprendono.

Tav.III. Sia la retta AB comunque divisa in C. Sarà il quadrato di AB uguale al quadrato di AC, all'altro di CB, e a due rettangoli di AC e CB.
Fig.4.

Perocchè fatto sopra AB il quadrato AD (*pr.* 46.1.), e tirato il diametro EB; se si conduca da C la CF parallela ad AE, che segherà il

il diametro in O, e per O la GH parallela ad AB (*pr.* 31. 1.); sarà l'angolo esteriore COB uguale all'interno opposto AEB (*pr.* 29. 1.). Allo stesso AEB però è uguale l'angolo ABE per l'uguaglianza de' lati AE, AB (*pr.* 5. 1.). Dunque l'angolo COB sarà uguale a CBO; e quindi il lato CB a CO (*pr.* 6. 1.). Ma OH è uguale a CB, e BH a CO (*pr.* 34. 1.). Dunque il parallelogrammo CH sarà equilatero. Ed è rettangolo per l'angolo retto in B (*cor. pr.* 46. 1.). Sarà pertanto il quadrato di CB. Per la ragione stessa GF è il quadrato di GO. Essendo adunque GO uguale ad AC, sarà GF il quadrato di AC. Or poichè i compimenti AO, OD sono tra se uguali (*pr.* 43. 1.); siccome AO è il rettangolo di AC e CO, o vero di AC e CB per l'uguaglianza de' lati CO, CB; così i due AO, OD sono due rettangoli di AC e CB. Poichè dunque AO ed OD insieme con GF e CH compongono l'intero AD, sarà il quadrato di AB uguale a quei di AC, e di CB, e a due rettangoli di AC e CB.

Corol. Quindi in ogni quadrato i parallelogrammi intorno al diametro sono quadrati.

PROPOSIZIONE V.

Se una retta sia segata in parti uguali, e in disuguali, il rettangolo delle disuguali col quadrato della retta intermedia alle sezioni uguaglierà il quadrato della metà.

Sia la retta AB segata in parti uguali nel punto C, in disuguali nel punto D. Il rettangolo Tav. III. *Fig.* 5.

golo

golo compreso da AD e DB col quadrato di CD sarà uguale al quadrato di CB.

Perocchè descritto su la CB il quadrato CE, e condotto il diametro FB; si tiri da D la DG parallela a CF, che segherà in O il diametro, e si perfezioni il rettangolo AI. Ed essendo i compimenti CO, OE tra se uguali (*pr.* 43. 1.), aggiunto DI sarà CI uguale a DE. Ma per l'uguaglianza delle basi CB, CA lo stesso CI è uguale a CH (*pr.* 36. 1.). Sicchè CH sarà uguale a DE; ed aggiunto CO sarà AO uguale allo gnomone LMN; ed aggiunto in oltre PG sarà AO con PG uguale all'intero CE. Or AO è il rettangolo di AD e DO, o vero di AD e DB per essere uguali i lati DO, DB; e PG è il quadrato di CD (*cor. prec.*). Dunque il rettangolo di AD e DB insieme col quadrato di CD sarà uguale al quadrato di CB.

PROPOSIZIONE VI.

Se ad una retta per metà divisa si aggiunga a dirittura un' altra retta, sarà il rettangolo di tutta la composta e dell' aggiunta insieme col quadrato della metà uguale al quadrato della retta, che della metà e dell' aggiunta si compone.

TAV. III. *Fig.* 6. Alla retta AB divisa per metà in C si aggiunga in diretto la BD. Sarà il rettangolo di AD e DB insieme col quadrato di CB uguale al quadrato di CD.

Perciocchè fatto su la CD il quadrato CE; e tirata da B la BG parallela a CF, che seghi il diametro FD in O; si compia il rettangolo AH

AH. E poichè per le basi uguali CA, CB il rettangolo CI è uguale a CO (*pr.* 36. 1.), ed a CO è ancora uguale OE (*pr.* 43. 1.) sarà CI uguale ad OE; onde aggiunto CH sarà AH uguale allo gnomone LMN; e aggiunto PG sarà AH con PG uguale all'intero CE. Ma AH è il rettangolo di AD e DH, o di AD e DB per l'uguaglianza de' lati DB, DH; e PG è il quadrato di CB (*cor. pr.* 4.). Sicchè il rettangolo di AD e DB col quadrato di CB uguaglierà il quadrato di CD.

PROPOSIZIONE VII.

I quadrati di una retta segata comunque in un punto, e di una delle sue parti, uguagliano due rettangoli di essa retta e della parte stessa insieme col quadrato della parte rimanente.

Sia la retta AB divisa ad arbitrio in C. Saranno i due quadrati di AB, e di CB uguali a due rettangoli di AB e BC insieme col quadrato di AC. TAV.III. *Fig.* 7.

Imperciocchè fatto sopra AB il quadrato AD, se si costruisca lo gnomone LMN, i compimenti AO, OD saranno tra se uguali (*pr.* 43. 1.), ed aggiunto CH uguali altresì saranno AH, e CD; onde presi insieme uguaglieranno due AH. Ed uguagliano lo gnomone LMN con CH. Sicchè lo gnomone LMN con CH uguaglierà due AH; e aggiunto GF l'intero AD con CH uguaglierà due AH, e GF. Or AH è il rettangolo di AB e BH, o di AB e BC, essendo BH uguale a BC; GF è il quadrato di AC,

CH

CH di CB (*cor. pr.* 4.). Dunque i quadrati di AB, e di CB uguaglieranno due rettangoli di AB e BC insieme col quadrato di AC.

PROPOSIZIONE VIII.

Se ad una retta ſegata comunque in un punto ſi aggiunga per diritto una delle ſue parti, ſarà il quadrato di tutta la compoſta uguale a quattro rettangoli di eſſa retta e della parte aggiunta inſieme col quadrato della parte rimanente.

TAV. III. *Fig.* 8. Alla retta AB comunque diviſa in C ſi aggiunga a dirittura la BD uguale a BC. Sarà il quadrato di AD uguale a quattro rettangoli di AB e BC, e al quadrato di AC.

Imperocchè deſcritto ſopra AD il quadrato AE, ſi coſtruiſca il doppio gnomone LMN. E poichè CB è uguale a BD, e quindi QR ad RK (*pr.* 34. 1.), ſarà CR uguale a BK, e QT ad RP (*pr.* 36. 1.). Uguali però ſono i due CR, RP (*pr.* 43. 1.), e i due BK, QT ſono quadrati (*cor. pr.* 4.). Sicchè i quattro CR, BK, QT, RP, ſaranno e uguali, e quadrati; onde come il lato CQ è uguale a QS, ed ST a TP, ſarà così CI uguale ad IS, ed SG a GP. Ma i compimenti IS, SG ſono uguali. Uguali adunque ſaranno anche i quattro CI, IS, SG, GP. Or un di queſti CI, e un de' primi CR formano AR. Tutti pertanto inſieme formeranno quattro AR. E compongono lo gnomone LMN. Sicchè lo gnomone LMN uguaglierà quattro AR; ed aggiunto OH ſarà l'intero AE uguale a quattro AR con OH. Ma AR è il rettangolo

lo di AB e BR, o di AB e BC per l'uguaglianza de' lati BR, BC, ed OH è il quadrato di AC (*cor. pr.* 4.). Per la qual cosa il quadrato di AD sarà uguale a quattro rettangoli di AB e BC, e al quadrato di AC.

PROPOSIZIONE IX.

Se una retta sia divisa in parti uguali, e in disuguali, i quadrati delle disuguali saranno il doppio di quei della metà, e della parte intermedia alle sezioni.

Sia la retta AB segata in parti uguali nel punto C, in disuguali nel punto D. Saranno i quadrati di AD, e di DB il doppio degli altri di AC, e di CD. Tav.III. *Fig. 9.*

Imperocchè s'alzi da C la CE perpendicolare ad AB (*pr.* 11. 1.), e facciasi uguale ad AC, o a CB (*pr.* 3. 1.); tirata indi AE, e BE, si conduca da D la DF parallela a CE, da F la FG parallela a CD (*pr.* 31. 1.); e si congiunga la FA. E poichè i triangoli CAE, CBE sono isosceli e rettangoli in C, avranno semiretto l'angolo B non meno che gli altri CEA, CEF, de' quali si compone il retto AEF (*cor.* 1. *pr.* 32. 1.). Sono però retti gli angoli EGF, FDB, come uguali all'opposto ECB (*pr.* 29. 1.). Dunque gli altri EFG, BFD saranno semiretti (*pr.* 32. 1.); e perciò sarà GE uguale a GF, e DF a DB (*pr.* 6. 1.). Or nel triangolo CAE il quadrato di AE, perchè uguale a i due di CA, e di CE (*pr.* 47. 1.), che sono tra se uguali (*cor. pr.* 46. 1.), è doppio del quadrato di AC; e per la

ra-

ragione stessa il quadrato di EF è doppio di quello di GF, o di CD (*pr.* 34. 1.). Sicchè i quadrati di AE, e di EF saranno il doppio di quei di AC, e di CD. Ma i quadrati di AE, e di EF uguagliano quello di AF, o quelli di AD, e di DF, o gli altri di AD, e di DB. Questi adunque saranno il doppio de' quadrati di AC, e di CD.

PROPOSIZIONE X.

Se ad una retta per metà divisa in diretto si aggiunga un' altra retta, i quadrati di tutta la composta, e dell' aggiunta saranno il doppio di quei della metà, e della retta, che della metà e dell' aggiunta si compone.

Tav.III. Fig.10. Alla retta AB segata per mezzo in C si aggiunga a dirittura la BD. I quadrati di AD, e di BD saranno il doppio degli altri di AC, e di CD.

Perciocchè innalzata da C la CE perpendicolare ad AB (*pr.* 11. 1.), e fatta uguale ad AC, o a CB (*pr.* 3. 1.), si congiungano le rette AE, BE; si compia indi il rettangolo CG; e prolungate le rette GD, EB, finchè s'incontrino in F, si tiri la FA. Ed essendo i triangoli CAE, CBE isosceli e rettangoli in C, avranno semiretti e gli angoli CEA, CEB, che compongono il retto AEB, e l'altro CBE (*cor.* 1. *pr.* 32. 1.), che uguaglia l'opposto al vertice DBF. Essendo pertanto retti gli angoli BDF, e G, gli altri BFD, e GEF saranno semiretti (*pr.* 32. 1.); onde sarà DF uguale a DB, e GF a GE (*pr.* 6. 1.). Or nel

nel triangolo CAE il quadrato di AE, come uguale a i due di AC, e di CE (*pr.* 47. I.), che tra se sono uguali (*cor. pr.* 46. I.), è doppio di uno di essi; e per la stessa ragione il quadrato di EF è doppio di quello di EG, o di CD (*pr.* 34. I.). Dunque i quadrati di AE, e di EF saranno il doppio di quei di AC, e di CD. I quadrati però di AE, e di EF uguagliano quello di AF, o quelli di AD, e di DF, o gli altri di AD, e di DB. Questi pertanto saranno il doppio de' quadrati di AC, e di CD.

PROPOSIZIONE XI.

Segare in un punto una retta data, tal che il rettangolo compreso da essa e da una delle sue parti uguagli il quadrato della parte rimanente.

Sia la retta AB, che divider si debba secondo l'esposta condizione. TAV. III. Fig. 11.

Descritto sopra AB il quadrato AC (*pr.* 46. I.), e diviso per metà il lato AD in E (*pr.* 10. I.), si congiunga la BE; distesa indi la retta EA verso F, e fatta EF uguale ad EB (*pr.* 3. I.), si faccia di AF il quadrato AG, ed il lato GI si prolunghi in H. Si avrà in I la sezione richiesta.

Imperocchè essendosi alla retta DA per metà divisa in E aggiunta in diretto AF, sarà il rettangolo di DF ed FA insieme col quadrato di EA uguale al quadrato di EF (*pr.* 7.) o di EB (*cor. pr.* 46. I.), o di EA e di AB (*pr.* 47. I.) Tolto pertanto il quadrato comune di EA resterà il rettangolo di DF ed FA, o vero di DF

ed

ed FG, cioè DG uguale ad AC; e tolto AH da questi resterà AG uguale ad IC. Ma IC è il rettangolo di CB e BI, o di AB e BI; ed AG è il quadrato di AI. Dunque il rettangolo della data AB e di BI sua parte uguaglierà il quadrato dell' altra parte AI.

PROPOSIZIONE XII.

In ogni triangolo ottusangolo il quadrato del lato posto incontro all' angolo ottuso supera quei de' lati rimanenti di due rettangoli compresi da un de' lati dell' ottuso angolo, e da quella parte del medesimo lato disteso, che è fuori del triangolo tra l' angolo ottuso e la perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo opposto.

Tav.III. *Fig.*12. Sia il triangolo ABC ottusangolo in C, e sul lato BC prolungato verso D cada dal vertice A la perpendicolare AD. Il quadrato di AB supererà quei di AC, e di BC di due rettangoli, che si contengono da BC, e CD.

Imperocchè essendo il quadrato di BD uguale a quei di BC, di CD, e a due rettangoli di BC e CD (*pr.*4.), aggiunto il quadrato di AD saranno i due di BD, e di AD uguali a quei di BC, di CD, di AD, e a due rettangoli di BC e CD. Ma per l'angolo D retto i due di BD, e di AD uguagliano quello di AB; e gli altri di CD, e di AD uguagliano l'altro di AC (*pr.* 47. I.). Dunque il quadrato di AB uguaglierà quei di AC, di BC, e due rettangoli di BC e CD; cioè di questi rettangoli il quadrato di AB supererà quei di AC, e di BC.

PRO-

PROPOSIZIONE XIII.

In ogni triangolo il quadrato del lato opposto all' angolo acuto manca da quei de' rimanenti lati di due rettangoli, che si comprendono da un de' lati dell' acuto angolo, e dalla parte del lato stesso tra l' angolo acuto e la perpendicolare tirata dal vertice dell' angolo opposto.

Il triangolo ABC abbia l' angolo acuto B, e dal vertice A cada sul lato BC la perpendicolare AD. Il quadrato di AC da quei di AB, e di BC mancherà di due rettangoli di BC e BD. Tav.III. *Fig.* 13.

Perciocchè essendo i quadrati di BC, e di BD uguali a due rettangoli di BC e BD, e al quadrato di DC (*pr.* 7.), aggiunto il quadrato di AD saranno quei di BC, di BD, e di AD uguali a due rettangoli di BC e BD, e a due quadrati di DC, e di AD. Ma per gli angoli retti in D i quadrati di BD, e di AD uguagliano quello di AB; e gli altri di DC, e di AD uguagliano l' altro di AC (*pr.* 47.1.). Sicchè i quadrati di AB, e di BC uguaglieranno quello di AC, e due rettangoli di BC, e BD; cioè di questi rettangoli mancherà il quadrato di AC dagli altri di AB, e di BC.

PROPOSIZIONE XIV.

Costituire un quadrato uguale a un dato rettilineo.

Sia il rettilineo A, e far si debba un quadrato, che l' uguagli. Tav.III. *Fig.*14.

Facciasi il rettangolo BD uguale ad A (*pr.* 45. 1.), e se quello abbia il lato BC uguale a CD, si sarà sciolto il problema. Altrimenti disteso il lato maggiore BC verso E, e fatta CE uguale a CD, si seghi per metà la BE in F (*pr.* 10. 1.); descritto poi col raggio FB il semicerchio BGE, si prolunghi in G la DC, e si tiri FG. Il quadrato di CG sarà il richiesto.

Perciocchè essendosi la BE divisa in parti uguali nel punto F, in disuguali nel punto C, sarà il rettangolo di BC e CE col quadrato di FC uguale al quadrato di FE (*pr.* 5.). Or il quadrato di FE è uguale a quello di FG, e questo è uguale a i due di FC, e di CG (*pr.* 47. 1.). Sicchè il rettangolo di BC e CE col quadrato di FC sarà uguale a i due di FC, e di CG; onde tolto il quadrato comune di FC resterà il rettangolo di BC e CE uguale al quadrato di CG. Ma per l' uguaglianza de' lati CE, CD il rettangolo di BC e CE è uguale a BD, e BD è uguale al rettilineo A. Dunque allo stesso A sarà anche uguale il quadrato di CG.

LIBRO III.

DEFINIZIONI.

I. Uguali sono i cerchi, de' quali i diametri, o vero i raggi sono uguali.

II.

II. La retta *tocca* il cerchio, se ne incontra la circonferenza, e prolungandosi non la sega.

III. I cerchi così, de' quali s' incontrano le circonferenze, ma non si segano, l' un l'altro *si toccano*.

IV. Nel cerchio *ugualmente distano dal centro* le rette, su le quali cadono perpendicolari uguali. E quella *dista più*, su la quale cade la perpendicolare maggiore.

V. La figura terminata da una retta, e da una parte della circonferenza, che non sia la metà, si chiama *Porzione del cerchio*. Tal retta *Corda*; ed *Arco* si chiama la parte della circonferenza.

VI. L'*Angolo della porzione* è quello, che la corda fa con l'arco. L' *Angolo nella porzione* è quello, che nell'arco ha il vertice, e va co' lati a terminare negli estremi della corda.

VII. Quello poi, che negli estremi di un arco termina co' lati, se nella circonferenza ha il vertice, *Angolo alla circonferenza*; se nel centro lo ha, *Angolo al centro* si dice.

VIII. Si dicono in oltre *Simili* le porzioni, nelle quali si contengono angoli uguali.

IX. E *Settore del cerchio* si chiama lo spazio compreso da due raggi, che fanno angolo al centro, e dall'arco, sul quale sta l' angolo stesso.

PROPOSIZIONE I.

Dato un cerchio ritrovarne il centro.

Sia il cerchio ABC, del quale bisogna ritrovare il centro. Tav.III. *Fig.*15.

Si conduca in esso una retta qualunque BC; questa per metà si divida in D (*pr.*10.1.); da D su la BC s' innalzi la perpendicolare DA (*pr.* 11. 1.), che si prolunghi in E; e la retta AE si seghi per mezzo in F. Il punto F sarà il centro del cerchio ABC.

Altrimenti sia un punto diverso G, e congiunta la GD si tirino i raggi GB, GC. E poichè i triangoli GDB, GDC hanno il lato GD comune, ed uguali i lati DB, DC, non meno che le basi GB, GC; avranno gli angoli GDB, GDC ed uguali (*pr.* 8. 1.), e retti (*def.* 5. 1.). Ma retto è ancora l' angolo FDC Questo adunque sarà uguale all' angolo GDC (*as.* 9.); la qual cosa ripugnando (*as.* 6.), ripugna che G sia il richiesto centro. E lo stesso dimostrar si può di ogni altro punto, fuorchè del solo F. Sicchè F sarà il centro del circolo ABC.

Corol. Da ciò è manifesto, che se nel cerchio una retta seghi un' altra per metà, e ad angoli retti, debba nella segante ritrovarsi il centro.

PROPOSIZIONE II.

La retta, che congiugne due punti della circonferenza, cade dentro il cerchio.

Tav.III. *Fig.* 16. Congiunga i punti B, e C della circonferenza ABC la retta BC. Questa caderà dentro il cerchio.

Perciocchè trovato il centro D (*pr.* 1.), e condotti i raggi DB, DC, saranno nel triangolo

lo isoscele DBC uguali gli angoli B, e C (*pr.* 5. 1.). Se però nella BC si prenda un punto E, e si tiri la DE, nel triangolo DBE sarà l' esterno angolo DEC maggiore dell' opposto interno B (*pr.* 16. 1.). Dunque lo stesso DEC sarà anche maggiore di C (*as.* 1.); e perciò nel triangolo DEC il lato DC sarà maggiore di DE (*pr.* 19. 1.). Ma del lato DC l'estremo C perviene alla circonferenza. Sicchè del minore DE non vi potrà l' estremo E pervenire. Per la ragione medesima pervenir non vi potrà qualunque altro punto della retta BC: Questa adunque caderà dentro il cerchio ABC.

PROPOSIZIONE III.

Se nel cerchio una retta tirata per lo centro seghi per metà un' altra, che per lo centro non passa, le sarà perpendicolare; e se perpendicolare le sia, la segherà per metà.

Passi per D centro del cerchio ABC la retta AE, e divida per mezzo in F l' altra BC, che per D non passa. Sarà AE perpendicolare a BC. TAV. III. *Fig.* 17.

Imperocchè tirati i raggi DB, DC, i triangoli FDB, FDC avranno il lato FD comune, ed uguali i lati FB, FC, siccome le basi DB, DC. Quindi avranno uguali gli angoli DFB, DFC (*pr.* 8. 1.). E quindi AE sarà perpendicolare a BC (*def.* 5. 1.).

Sia ora AE perpendicolare a BC; e la dividerà per mezzo in F.

Imperocchè essendo isoscele il triangolo DBC,

 sa-

sarà l'angolo B uguale a C (*pr.* 5. 1.). Poichè dunque i triangoli FDB, FDC oltre il lato FD comune hanno uguali e gli angoli B, C, e i due retti in F; avranno il lato BF uguale a CF (*pr.* 26. 1.). Sicchè dalla retta AE sarà la BC per metà divisa nel punto F.

PROPOSIZIONE IV.

Se nel cerchio due rette non tirate per lo centro si seghino, non si segheranno ambedue per metà.

Tav.III. Fig.18. Nel cerchio ABC le rette BC, FG non incontrino il centro D, e si seghino in E. Non si segheranno ambedue per metà.

Altrimenti la retta DE condotta dal centro al punto della sezione sarebbe perpendicolare sì a BC, che ad FG (*pr.* 3.); onde gli angoli DEC, DEG sarebbono e retti, ed uguali (*as.* 9.). La qual cosa non potendo avvenire (*as.* 6.), non potranno le rette BC, FG ambedue per metà segarsi.

PROPOSIZIONE V.

I cerchi, che si segano, non hanno il medesimo centro.

Tav.III. Fig. 19. Si seghino in A i cerchi ABC, ADE. Di essi non sarà uno il centro.

Altrimenti sia F, e tirate le rette FA, FDB, sarà ad FA uguale così il raggio BF, come l'altro DF. Sarà pertanto BF uguale a DF. Or ciò ripugna (*as.* 6.). Ripugna adunque, che i cerchi ABC, ADE abbiano lo stesso centro.

PRO-

PROPOSIZIONE VI.

I cerchi, che al di dentro si toccano, non hanno il centro stesso.

Si tocchino al di dentro in A i cerchi ABC, ADE. Di questi non sarà uno il centro. Tav.III. Fig.20.

Altrimenti sia F, e condotte le rette FA, FDB, sarà uguale ad FA e il raggio BF, e l'altro DF. Laonde BF sarà uguale a DF. Ma ciò è assurdo (*as. 6.*). Sicchè è assurdo, che i cerchi ABC, ADE abbiano il medesimo centro.

PROPOSIZIONE VII.

Delle rette tirate alla circonferenza da un punto del diametro diverso dal centro massima sarà quella, nella quale è il centro; minima sarà la parte rimanente del diametro; la più vicina alla massima sarà maggiore della più lontana; nè più di due saranno tra se uguali.

Alla circonferenza ABC arrivino dal punto F le rette FB, FG, FH, oltre la parte del diametro FA, e l'altra FE, nella quale è il centro D. Sarà FE la massima, FA la minima, FB maggiore di FG, e da F tirar non si potrà ad FB, o ad FG, se non che una uguale. Tav.IV. Fig.1.

Imperocchè se a' raggi DE, DB si aggiunga FD, sarà tutta la FE uguale alle due FD, DB. Queste però sono maggiori di FB (*pr.* 20. 1.). Sicchè anche FE sarà maggiore di FB. Non

 altri-

altrimenti dimoſtrar ſi può FE maggiore di ogni altra. Di tutte adunque ſarà la maſſima.

Or delle due DF, FH è minore come il raggio DH (*pr.* 20.1.), così l' uguale DA. Dunque tolta DF reſterà FA minore di FH. E per la ragione ſteſſa ſarà di tutte la minima.

Di più ne' triangoli DFB, DFG il lato DF è comune, gli altri DB, DG ſono uguali, e l' angolo FDB è maggiore di FDG. Per la qual coſa FB ſarà maggiore di FG (*pr.* 24.1.). Se poi al centro D ſi faccia l' angolo FDC uguale ad FDB (*pr.* 23.1.), e ſi congiunga FC, ne' triangoli DFB, DFC ſaranno uguali e que' due angoli, e i lati DB, DC, oltre il lato DF comune. Saranno pertanto uguali le due FB, FC (*pr.* 4.1.). Di queſte però ogni altra retta, che pervenga da F alla circonferenza, eſſer dee o più vicina ad FE, e perciò maggiore, o più lontana, e perciò minore. Sicchè dal punto F alla circonferenza arrivar non potranno più di due rette tra ſe uguali.

PROPOSIZIONE VIII.

Se da un punto fuori del cerchio cadano più rette alla circonferenza, e dove concava è, e dove è conveſſa; tra le prime maſſima ſarà quella, che incontra il centro, e la più vicina ad eſſa ſarà maggiore della più lontana; tra le altre minima ſarà quella, che diſteſa incontrerebbe il centro, e la più vicina ad eſſa ſarà minore della più lontana; nè alla concava circonferenza, nè alla conveſſa caderanno da quel punto più di due rette tra ſe uguali.

Alla

Alla circonferenza ABC pervengano dal punto esterno F le rette FG, FB, ed FE, che incontri il centro D. Sarà FE la massima, ed FB maggiore di FG; sarà in oltre FA la minima, ed FI minore di FH; nè più di due uguali perverranno da F ad ABC. Tav. IV. *Fig.* 2.

Perocchè se a' raggi DE, DB si aggiunga FD, sarà l'intera FE uguale alle due FD, DB. Ma queste sono maggiori di FB (*pr.* 20. 1.). Dunque ancor quella. Similmente dimostrar si può FE maggiore di ogni altra. Laonde di tutte sarà la massima.

E ne' triangoli FDB, FDG il lato FD è comune, l'altro DB è uguale a DG, e l'angolo FDB è maggiore di FDG. Sicchè FB sarà maggiore di FG (*pr.* 24. 1.).

In oltre FD è minore delle due FI, ID (*pr.* 20. 1.). Tolti adunque i raggi DA, DI, rimarrà FA minore di FI. Nella stessa maniera si dimostra FA minore di ogni altra. Di tutte pertanto sarà la minima.

E nel triangolo FHD le due FI, ID sono minori de' lati FH, HD (*pr.* 21. 1.). Dunque tolti i raggi DI, DH, resterà FI minore di FH.

Or fatto l'angolo FDC uguale ad FDG, ed FDL ad FDH (*pr.* 23. 1.), si congiunga FC. Ed essendo ne' triangoli DFG, DFC comune il lato DF, ed uguali gli altri DG, DC, non meno che que' primi angoli; uguali saranno le due FG, FC (*pr.* 4. 1.). Parimente ne' triangoli DFH, DFL essendo il lato DF comune, ed uguali gli altri DH, DL, non meno che que' secondi angoli, saranno uguali le due FH,

FL.

FL. Ma di queste ogni altra retta, che cada da F ad ABC, esser dee o più vicina ad FA, e quindi minore, o più lontana, e quindi maggiore; di quelle al contrario ogni altra retta, che da F ad ABC cada, esser dee o più vicina ad FE, e perciò maggiore, o più lontana, e perciò minore. Per la qual cosa più di due uguali cader non potranno dal punto F alla circonferenza, nè dove concava questa è, nè dove è convessa.

PROPOSIZIONE IX.

Il punto del cerchio, donde alla circonferenza arrivano più che due rette uguali, è di esso il centro.

Tav.IV. *Fig.* 3. Pervengano dal punto D alla circonferenza ABC tre rette uguali DB, DC, DE. Sarà D il centro del cerchio ABC.

Perciocchè congiunte le BC, CE, e segate per mezzo in F, e G (*pr.* 10. 1.), si tirino le rette FD, GD, le quali da ambedue le parti si distendano fino alla circonferenza. E poichè i triangoli FDB, FDC hanno il lato FD comune, ed uguali gli altri FB, FC, siccome le basi DB, DC; avranno gli angoli DFB, DFC uguali (*pr.* 8. 1.), e retti (*def.* 5. 1.). Parimente i triangoli GDC, GDE avendo il lato GD comune, ed uguali gli altri GC, GE, siccome le basi DC, DE; avranno uguali, e retti gli angoli DGC, DGE. Dunque le rette AH, IK ne' punti F, e G segano le altre BC, CE e per metà, e ad angoli retti. In tali seganti però ritrovar si dee il centro del cerchio (*cor.*

(*cor. pr.* 1.). Il centro adunque del cerchio ABC esser dovrà e nella retta AH, e nell' altra IK. Quindi sarà in D.

PROPOSIZIONE X.

Un cerchio colla sua circonferenza non sega l'altro nella sua, se non che in due punti.

Si seghino l'un l'altro i cerchi ABC, DCE. Questi colle loro circonferenze si segheranno in due punti soli. TAV. IV. *Fig.* 4.

Altrimenti si seghino in tre B, C, E; e trovato il centro F del cerchio ABC (*pr.* 1.), si conducano i raggi FB, FC, FE. E poichè da F arrivano tre rette uguali FB, FC, FE alla circonferenza del cerchio DCE, di questo sarà centro il punto F (*pr.* 9.). Ed è centro dell' altro ABC. Sicchè i cerchi ABC, DCE hanno il medesimo centro. Ciò ripugna (*pr.* 5.). Ripugna pertanto, che i cerchi ABC, DCE colle loro circonferenze si seghino in più che due punti.

PROPOSIZIONE XI.

Se due cerchi si tocchino al di dentro, la retta, che ne congiugne i centri, distesa perverrà al luogo del contatto.

Si tocchino di dentro in A i cerchi ABC, ADE, e la retta FG ne congiunga i centri F, e G. Questa prolungandosi arriverà in A. TAV. IV. *Fig.* 5.

Altrimenti arrivi in H; e condotti i raggi FA, GA saranno le due FG, GA maggiori

non

non meno di FA (*pr.* 20. 1.), che dell' uguale FH. Laonde tolta FG resterà GA maggiore di GH. Ma GI è uguale a GA. Sicchè GI sarà maggiore di GH. La qual cosa ripugnando, ripugna che la retta FG prolungata non pervenga in A.

PROPOSIZIONE XII.

Se due cerchi si tocchino al di fuori, la retta, che ne congiugne i centri, passerà per lo luogo del contatto.

TAV. IV, *Fig. 6.* Si tocchino di fuori in A i cerchi ABC, ADE, e la retta FG ne congiunga i centri F, e G. Passerà questa per A.

Altrimenti passi per H, ed I; e tirati i raggi al punto A, saranno FA, GA uguali ad FH, GI. Quelli però sono maggiori di FG (*pr.* 20. 1.). Dunque ancor questi. E ciò è assurdo. Pertanto è assurdo, che la retta FG non passi per A.

PROPOSIZIONE XIII.

Il contatto de' cerchi è in un punto solo.

TAV. IV. *Fig. 7.* Si tocchino in A due cerchi. Nel solo punto A quei si toccheranno.

Pongasi altrimenti il loro contatto nell' arco AH; e tirata per li centri F, e G la retta FG, che distesa dovrà in A pervenire (*pr.* 11.), si conducano i raggi FH, GH. Ed essendo le due FG, GH maggiori di FH (*pr.* 20. 1.), non meno che dell' uguale FA; tolta FG, resterà il raggio GH maggiore dell' altro GA. Ma

Ma ciò ripugna. Sicchè i cerchi ABC, ADE toccandosi di dentro, toccar si dovranno nel solo punto A.

Si tiri ora per li centri F, ed L la retta FL, che per A dovrà passare (*pr.* 12.), e di più i raggi FH, LH. E poichè questi insieme sono maggiori di FL (*pr.* 20. 1.); tolti gli uguali FH, FA, resterà il raggio LH maggiore dell' altro LA. Ciò parimente è assurdo. Sicchè toccandosi di fuori i cerchi ABC, AIK, nel solo punto A si toccheranno.

PROPOSIZIONE XIV.

Nel cerchio le rette uguali distano ugualmente dal centro, e le ugualmente distanti dal centro, sono tra se uguali.

Nel cerchio ABC sieno uguali le rette AB, EC. Saranno dal centro D ugualmente distanti. **Tav.IV. Fig.8.**

Imperocchè se dal centro D sopra di esse cadano le perpendicolari DF, DG, che in F, e G per metà le segheranno (*pr.*3.); sarà FB uguale a GC (*as.* 5.), e il quadrato di FB altresì uguale a quello di GC (*cor. pr.* 46. 1.). Se però si conducano i raggi DB, DC, sarà il quadrato di DB uguale a i due di DF, e di FB, siccome l'altro di DC uguale agli altri di DG, e di GC (*pr.* 47. 1.); onde per l' uguaglianza de' quadrati di DB, e di DC, i due di DF, e di FB uguaglieranno quei di DG, e di GC. Se si tolgano pertanto gli uguali di FB, e di GC, rimarrà il quadrato di DF uguale a quello di DG. Quindi sarà DF ugua-

le

Sicchè ancor quello. Perciò la retta EC sarà perpendicolare al raggio DC nell' estremo C; e sarà perciò tangente del cerchio ABC (*cor. prec.*).

PROPOSIZIONE XVIII.

Se una retta tocchi il cerchio, e al contatto dal centro un' altra retta si conduca, quella sarà perpendicolare alla tangente.

La retta EF tocchi in A il cerchio ABC, e dal centro D ad A si tiri la DA. Questa sarà perpendicolare ad EF. Tav. IV. *Fig.* 12.

Altrimenti sia ad EF perpendicolare un' altra retta qualunque DG. E poichè per l' angolo retto DGA l' altro DAG è acuto (*pr.* 17. 1.), sarà DA maggiore di DG (*pr.* 19. 1.). Ma DA è uguale a DC. Sarà pertanto DC maggiore di DG. Ciò ripugna. Ripugna adunque, che DA non sia perpendicolare ad EF.

PROPOSIZIONE XIX.

Se una retta tocchi il cerchio, e dal contatto s' alzi la perpendicolare alla tangente, in quella sarà il centro.

La retta EF in A tocchi il cerchio ABC, e da A s' innalzi sopra EF la perpendicolare AB. In questa sarà il centro. Tav. IV. *Fig.* 13.

Altrimenti sia fuori di AB in G, e si congiunga la GA. Sarà GA perpendicolare ad EF (*pr.* 18.). E ad EF è perpendicolare AB. Sicchè gli angoli FAG, FAB saranno retti, ed uguali (*as.* 9.). Ciò è assurdo. Dunque è assurdo,

furdo, che in AB non fia il centro del cerchio ABC.

PROPOSIZIONE XX.

Nel cerchio l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza, quando l'uno, e l'altro sta su l'arco medesimo.

TAV.IV. Fig.14. Su l'arco BC ftia l'angolo BDC al centro; e l'altro BAC, o vero BFC alla circonferenza. L'angolo BDC farà doppio così di BAC, come di BFC.

Imperciocchè fi tiri da A il diametro AE. E poichè per l'uguaglianza de' raggi DA, DB, i due angoli DAB, DBA fono tra fe uguali (*pr.* 5. 1.), infieme prefi formeranno il doppio del folo DAB. Prefi infieme però uguagliano l'efterno EDB (*pr.* 32. 1.). Dunque l'angolo EDB farà doppio di DAB. Per la fteffa ragione l'angolo EDC è doppio di DAC. Sicchè l'intero BDC farà doppio dell'intero BAC.

Se da F in oltre fi tiri il diametro FG, della maniera medefima fi dimoftrerà l'angolo GDC doppio di GFC, non meno che l'altro GDB di GFB. Dunque il rimanente BDC farà doppio del rimanente BFC.

PROPOSIZIONE XXI.

Gli angoli nella fteffa porzione di cerchio fono tra fe uguali.

TAV.IV. Fig. 15. Sieno gli angoli A, E nella porzione ABC maggiore del femicerchio, gli altri BFC, BGC nella

nella minore FBC. Gli uni, e gli altri saranno uguali.

Imperocchè trovato il centro D (*pr.* 1.), si conducano i raggi DB, DC. E poichè su lo stesso arco BFC stanno e gli angoli alla circonferenza A, E, e l' altro al centro BDC; sarà questo doppio di ciascuno di quelli (*pr.* 20.). Quelli pertanto tra se saranno uguali (*as.* 5.).

Poichè in oltre condotti i raggi DF, DG, sta su l' arco stesso FG e l' angolo al centro FDG, e gli altri alla circonferenza FBG, FCG; sarà quello doppio di ciascuno di questi; onde questi tra se uguali saranno. Ed uguali sono gli angoli al vertice FHB, GHC (*pr.* 15. 1.). Sicchè ne' triangoli BFH, GCH i rimanenti angoli BFC, BGC saranno parimente uguali (*cor.* 4. *pr.* 32. 1.).

PROPOSIZIONE XXII.

De' quadrilateri, che si descrivono ne' cerchi, gli angoli opposti sono uguali a due retti.

Nel cerchio ABC sia il quadrilatero ABCD. Gli angoli opposti di esso in A e C, in B e D uguaglieranno due retti. Tav. IV. *Fig.* 16.

Imperocchè se si tirino le rette AC, BD, nel triangolo ABD saranno uguali a due retti i tre angoli BAD, ABD, ADB (*pr.* 32. 1.). Ma sono tra se uguali e i due ABD, ACD nella porzione ABCD, e nell' altra ADCB i due ADB, ACB (*pr.* 21.). Dunque a due retti saranno ancora uguali i tre BAD, ACD, ACB. Di questi però i due ACD, ACB com-

pongono l' intero BCD. Sicchè i due BAD, BCD uguaglieranno due retti. E nella maniera medesima si dimostrano uguali a due retti gli angoli, che in B e D si oppongono.

PROPOSIZIONE XXIII.

Sopra la stessa retta verso la parte stessa costituir non si possono due porzioni di cerchi e simili, e disuguali.

Tav.IV. *Fig.*17. Altrimenti sieno tali porzioni ACB, ADB; e tirate le rette AD, BC, BD, per la somiglianza di esse sarà l' angolo ACB uguale a D (*def.* 8.), l' esterno cioè all' interno ed opposto del triangolo BDC. La qual cosa non potendo avvenire (*pr.* 16. 1.), non potranno su la retta medesima costituirsi dalla medesima parte due porzioni simili insieme e disuguali.

PROPOSIZIONE XXIV.

Le porzioni simili de' cerchi descritte sopra rette uguali sono tra se uguali.

Tav.IV. *Fig.*18. Sopra le rette uguali AB, CD sieno due porzioni simili AEB, CFD. Queste tra se saranno uguali.

Perocchè posta la porzione AEB sopra CFD, tal che il punto A cada in C, e la corda AB su la CD, per l' uguaglianza di queste caderà ancora l' estremo B in D. Or se l' arco AEB non cadesse su l' arco CFD, segandolo in G, due circonferenze in più di due punti segar si potrebbono (*pr.* 10.); e di dentro cadendo o di

fuori,

fuori, si potrebbono su la retta stessa costituire dalla stessa parte due porzioni simili e disuguali (*pr.* 23.). Perchè dunque l'uno, e l'altro ripugna, l'arco AEB caderà su l'arco CFD. Quindi le porzioni AEB, CFD si combaceranno; e quindi tra se saranno uguali (*as.* 8.).

PROPOSIZIONE XXV.

Data una porzione di cerchio descrivere il cerchio intero.

Sia la porzione ABC, e descriver si debba l'intero cerchio. Tav.IV. *Fig.*19.

La corda AC si divida per mezzo in D (*pr.* 10. 1.); da D s'innalzi la DB perpendicolare ad AC (*pr.* 11. 1.); e congiunta AB, e fatto l'angolo BAE uguale a B (*pr.* 23. 1.), si distenda la BD, se sia uopo, finchè AE l'incontri in E, e si conduca la CE. Il cerchio, che si descrive col centro E e intervallo EA, sarà il richiesto.

Perocchè avendo i triangoli DAE, DCE il lato DE comune, ed uguali gli altri DA, DC, non meno che gli angoli ADE, CDE fatti dalla perpendicolare; avranno la base EA uguale ad EC (*pr.* 4. 1.). Ma per gli angoli uguali B, e BAE, il lato EA è uguale ad EB (*pr.* 6. 1.). Sicchè le tre rette EA, EB, EC saranno uguali (*as.* 1.); onde il cerchio descritto col raggio EA passerà per B e C, e sarà l'intero della porzione ABC (*pr.* 9.).

Corol. Se il centro E cade fuori della porzione, quella sarà minore del semicerchio; se

cade dentro, farà maggiore. Ma se per l' uguaglianza degli angoli A, B il lato DB sia uguale a DA, caderà allora il centro E in D, e la porzione ABC non differirà dal semicerchio.

PROPOSIZIONE XXVI.

Gli angoli uguali a' centri, o alle circonferenze; ne' cerchi uguali stanno sopra archi uguali.

TAV.IV. *Fig.* 20. Sieno uguali i cerchi ABC, DEF, e gli angoli a' centri BGC, H, o quei alle circonferenze A, D. Uguali saranno gli archi BC, EF, su de' quali essi stanno.

Imperocchè ne' cerchi uguali ABC, DEF sono uguali e i raggi GB, HE, e gli altri GC, HF. Sono in oltre uguali gli angoli BGC, ed H. Sicchè tirate le corde BC, EF, ne' triangoli GBC, HEF sarà la base BC uguale ad EF (*pr.* 4.1.). Quindi le porzioni ABC, DEF esisteranno sopra rette uguali. E comprendendo gli angoli uguali A, D, sono simili (*def.* 8.). Dunque saranno uguali (*pr.* 24.). Se si tolgano però da' cerchi uguali, uguali saranno le porzioni rimanenti. Poichè dunque uguali sono di quelle le corde, uguali altresì saranno gli archi BC, ed EF.

PROPOSIZIONE XXVII.

Ne' cerchi uguali gli angoli a' centri, o alle circonferenze, posti sopra archi uguali sono tra se uguali.

Sic-

Sieno uguali i cerchi ABC, DEF, e gli archi BIC, ELF. Gli angoli a' centri BGC, H, e quei alle circonferenze A, D, che stanno su di essi, uguali tra se saranno. Tav. IV. Fig. 20.

Altrimenti sia l'angolo BGC maggiore di H, e fatto l'altro BGI uguale ad H (*pr.* 23. 1.), sarà l'arco BI uguale ad ELF (*pr.* 26.). Allo stesso ELF però è anche uguale l'arco BIC. Sicchè l'arco BI sarà uguale a BIC. La qual cosa ripugnando, sarà l'angolo BGC uguale ad H. Or gli angoli A, e D degli altri BGC ed H sono le metà (*pr.* 20.). Dunque gli angoli A, e D ancora saranno tra se uguali (*as.* 5.).

PROPOSIZIONE XXVIII.

Le corde uguali segano de' cerchi uguali le circonferenze in archi uguali.

Sieno tra se uguali e i cerchi ABC, DEF, e le corde BC, EF. Uguali tra se saranno e gli archi minori BIC, ELF, e i maggiori BAC, EDF. Tav. IV. Fig. 20.

Imperocchè per l'uguaglianza de' cerchi il raggio GB è uguale ad HE, l'altro GC ad HF. E' in oltre la corda BC uguale ad EF. Sicchè ne' triangoli GBC, HEF sarà l'angolo BGC uguale ad H (*pr.* 8. 1.). Quindi uguali saranno e gli archi BIC, ELF (*pr.* 26.), e tolti questi dalle circonferenze uguali, anche gli altri BAC, EDF.

PROPOSIZIONE XXIX.

Ne' cerchi uguali sono uguali le corde degli archi uguali.

TAV.IV. *Fig.* 20. I cerchi ABC, DEF, e gli archi BIC, ELF sieno tra se uguali. Uguali tra se saranno le corde BC, EF.

Imperocchè per l'uguaglianza de' cerchi il raggio GB è uguale ad HE, non meno che l'altro GC ad HF. Di più per l'uguaglianza degli archi è l'angolo BGC uguale ad H (*pr.* 27.). Pertanto sarà ancora la base BC uguale ad EF (*pr.* 4. 1.).

PROPOSIZIONE XXX.

Segare per metà un dato arco.

TAV.IV. *Fig.*21. Sia l'arco BAC da segarsi per metà.

Congiunta la BC, e divisa per mezzo in D (*pr.* 10. 1.), da D sopra essa s' alzi la perpendicolare DA (*pr.* 11. 1.). L' arco BAC in A sarà per metà diviso.

Imperocchè si tirino le corde AB, AC. E poichè i triangoli DAB, DAC hanno il lato DA comune, ed uguali gli altri DB, DC, siccome gli angoli ADB, ADC fatti dalla perpendicolare; avranno uguali le basi AB, AC (*pr.* 4. 1.). Ma ne' cerchi uguali, e molto più nello stesso cerchio sono uguali gli archi segati da corde uguali (*pr.* 28.). Sicche uguali saranno gli archi AB, AC parti dell'intero BAC.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXI.

L' angolo nel semicerchio è retto, nella porzione maggiore è acuto, nella minore è ottuso. L' angolo poi della porzione maggiore è maggior del retto, ed è del retto minore quello della minore.

Nel cerchio ABC sia il diametro BC, e il centro D. Sarà retto l'angolo BAC nel semicerchio, acuto l' angolo B nella porzione maggiore ABC, ottuso l'altro E nella minore AEC. Al contrario l'angolo mistilineo CAG della porzione maggiore sarà maggiore del retto, e del retto sarà minore l'altro CAE della minore. TAV.IV. *Fig.*22.

Perciocchè condotto il raggio DA, si distenda la BA verso F. E poichè per l'uguaglianza de' lati DB, DA l'angolo DAB è uguale a B, siccome l' altro DAC è uguale a DCA per l' uguaglianza de' lati DC, DA (*pr.* 5. 1.); sarà nel triangolo ABC l' intero angolo BAC uguale a i due B, e BCA (*as.* 2.). Nel triangolo però l' angolo, che uguaglia i due rimanenti, è retto (*cor.* 1. *pr.* 32. 1.). Sicchè retto sarà l' angolo BAC.

Di più in ogni triangolo due angoli sono minori di due retti (*pr.* 17. 1.). Perchè dunque nel triangolo ABC l' angolo BAC è retto, l'altro B sarà acuto.

E de' quadrilateri descritti ne' cerchi gli angoli opposti uguagliano due retti (*pr.* 22.). Essendo pertanto acuto l' angolo B, l' altro E sarà ottuso.

Ma retto è in oltre l' angolo CAF posto accanto

canto al retto CAB. Come adunque l'angolo CAG è maggiore del retto CAB, così del retto CAF sarà minore l'altro CAE.

PROPOSIZIONE XXXII.

Gli angoli compresi dalla tangente, e dalla corda uguagliano quei, che nelle porzioni alterne del cerchio si comprendono.

Tav.IV. Fig.23. La retta EF tocchi in B il cerchio ABC, e da B lo seghi la corda BD. Gli angoli DBF, DBE uguaglieranno quei, che si costituiscono nelle porzioni alterne DAB, DCB.

Perocchè dal contatto B sopra EF s'innalzi la perpendicolare BA (*pr.* 11. 1.), nella quale sarà il centro del cerchio ABC (*pr.* 19.); e congiunta AD, si faccia un angolo qualunque C nella porzione DCB. E poichè l'angolo ADB nel semicerchio è retto (*pr.* 31.), nel triangolo ADB i rimanenti angoli A, ed ABD uguaglieranno un retto (*cor.* 1. *pr.* 32. 1.). Ma l'angolo ABF fatto dalla perpendicolare è retto. Questo adunque uguaglierà i due A, ed ABD. Laonde tolto il comune ABD, l'angolo rimanente DBF compreso dalla tangente, e dalla corda uguaglierà il rimanente A, che nella porzione alterna DAB si comprende.

Or a due retti sono uguali e gli angoli DBF, DBE (*pr.* 13. 1.), e gli opposti A, C del quadrilatero descritto nel cerchio (*pr.* 22.). Questi pertanto a quelli saranno uguali. Per la qual cosa tolti gli uguali DBF, ed A, resterà l'angolo DBE uguale all' angolo C nella porzione alterna DCB.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXIII.

Sopra una data retta descrivere una porzione di cerchio, che comprenda un angolo uguale a un dato angolo rettilineo.

Sia la retta AB, su la quale descriver si debba una porzione di cerchio capace di un angolo uguale al dato C. TAV. IV. *Fig.* 24.

Al punto A della retta AB si costituisca l'angolo BAD uguale a C (*pr.* 23. 1.); e segata AB per metà in G (*pr.* 10. 1.), da A sopra AD, e sopra AB da G s'alzino le perpendicolari AE, GF (*pr.* 11. 1.), che s'incontrino in F, e si congiunga FB. Se col centro F, e intervallo FA si descriva il cerchio, si avrà la richiesta porzione AHB.

Perciocchè essendo ne' triangoli GFA, GFB il lato GF comune, gli altri GA, GB uguali, ed uguali gli angoli FGA, FGB; saranno uguali le basi FA, FB (*pr.* 4. 1.). Quindi il cerchio, che si descrive col centro F, e intervallo FA, passerà per B; e quindi su la data AB si avrà la porzione AHB. Or essendo AD perpendicolare al diametro AE nell'estremo A, toccherà il cerchio AEB (*pr.* 16.). Sicchè l'angolo DAB, come fatto dalla tangente e dalla corda, uguaglierà quello, che si comprende nella porzione alterna AHB (*pr.* 32.). Ma l'angolo DAB è uguale a C. Dunque la porzione AHB comprenderà un angolo uguale al dato C.

Corol. Se il dato angolo è acuto, la porzione

zione sarà maggiore del semicerchio; se è ottuso, sarà minore. Se poi sia retto, basterà per la soluzione del problema, che su la retta data si descriva il semicerchio (*pr.* 31.).

PROPOSIZIONE XXXIV.

Da un dato cerchio togliere una porzione capace di un angolo dato.

Tav.V. *Fig.* 1. Sia il cerchio ABC, dal quale toglier si debba una porzione capace dell'angolo D.

Per un punto qualunque B della circonferenza si conduca la tangente EF (*cor. pr.* 16.); e al punto B della retta BF si costituisca l'angolo FBC uguale al dato D (*pr.* 23. 1.). La porzione BAC sarà la richiesta,

Perocchè comprenderà un angolo uguale ad FBC (*pr.* 32.), cioè al dato D.

PROPOSIZIONE XXXV.

Se due rette nel cerchio si segano, il rettangolo delle parti di una uguaglierà quello delle parti dell' altra.

Tav.V. *Fig.* 2. Nel cerchio ABD si seghino le rette AB, CD in E; e se E sia il centro, per l' uguaglianza de' raggi è chiaro, che i rettangoli di AE ed EB, di CE ed ED sieno uguali.

Se poi il centro sia F; e la retta AB passando per F seghi l' altra CD ad angoli retti, e quindi per metà (*pr.* 3.); si conduca il raggio FD. E poichè la retta AB è divisa per metà in F, non per metà in E; il rettangolo di

di AE ed EB col quadrato di FE sarà uguale al quadrato di FB (*pr*. 5. 2.), o di FD, o di FE insieme e di ED (*pr*. 47. 1.). Laonde tolto il quadrato comune di FE, sarà il rettangolo di AE ed EB uguale al quadrato di ED. Ma per le uguali CE, ED il quadrato di ED è lo stesso, che il rettangolo di CE ed ED. Dunque il rettangolo di AE ed EB uguaglierà quello di CE ed ED.

Che se la retta AB passando per F sia obliqua a CD, su di questa dal centro F si abbassi la perpendicolare FG (*pr*. 12. 1.), che la dividerà per mezzo in G (*pr*. 3.), e si congiunga FD. E perchè la retta AB è divisa in parti uguali nel punto F, in disuguali nel punto E; il rettangolo di AE ed EB col quadrato di FE uguaglierà quello di FB, o vero di FD. Ma per l' angolo retto in G il quadrato di FE è uguale a quei di FG, e di GE; e l' altro di FD agli altri di FG e di GD. Sicchè il rettangolo di AE ed EB co' due quadrati di FG, e di GE uguaglierà i due di FG, e di GD; onde tolto il comune di FG, il rettangolo di AE ed EB col quadrato di GE uguaglierà quello di GD. Or per la retta CD divisa ugualmente in G, disugualmente in E, il rettangolo di CE ed ED col quadrato di GE è uguale a quello stesso di GD. Dunque il rettangolo di AE ed EB col quadrato di GE uguaglierà il rettangolo di CE ed ED col quadrato medesimo di GE. Sicchè tolto questo i rettangoli di AE ed EB, di CE ed ED rimarranno tra se uguali.

Se

Se finalmente delle date rette nè l' una, nè l' altra passi per F, condotto per F ed E il diametro GH, è manifesto, che al rettangolo di GE ed EH sia uguale come quello di AE ed EB, così l' altro di CE ed ED. Per la qual cosa uguali tra se saranno i due rettangoli di AE ed EB, di CE ed ED.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Se da un punto fuori del cerchio cada su di esso una retta, che lo tocchi, ed una, che lo seghi; il rettangolo di tutta la segante in quella parte che del cerchio è al di fuori, uguaglierà il quadrato della tangente.

TAV.V. *Fig.* 3. Cada nel cerchio ABC dal punto D la tangente DC, e la segante DE, nella quale sia il centro F. Sarà il rettangolo di ED e DA uguale al quadrato di DC.

Perocchè dal centro al contatto si tiri il raggio FC, che sarà perpendicolare alla tangente (*pr.* 18.). Ed essendo la retta EA per metà divisa in F, e a dirittura prolungata in D; il rettangolo di ED e DA col quadrato di FA sarà uguale a quello di FD (*pr.* 6. 2.), o di FC insieme e di DC (*pr.* 47. 1.). Tolti pertanto i quadrati uguali de' raggi FA, FC (*cor. pr.* 46. 1.), resterà il rettangolo di ED e DA uguale al quadrato di DC.

Or se il centro F sia fuori della segante DB, su la BH si abbassi da F la perpendicolare FG (*pr.* 12. 1.), che la dividerà per mezzo in G (*pr.* 3.), e si congiunga FH. E poichè la retta

ta BH segata per metà in G è a dirittura estesa in D; il rettangolo di BD e DH col quadrato di GH sarà uguale a quello di GD. Aggiunto adunque l'altro di GF, il rettangolo di BD e DH co' quadrati di GH, e di GF uguaglierà quei di GD, e di GF. Ma per l' angolo retto in G i quadrati di GH, e di GF uguagliano quello di FH; e gli altri di GD, e di GF uguagliano l'altro di FD, o vero i due di FC, e di DC. Sicchè il rettangolo di BD e DH col quadrato di FH sarà uguale a quei di FC, e di DC; onde tolti gli uguali di FH, e di FC, il rimanente rettangolo di BD e DH uguaglierà il quadrato rimanente di DC.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Se da un punto fuori del cerchio cada su di esso una retta, che lo seghi, ed una, che lo incontri, e il rettangolo della segante nella parte fuori del cerchio uguagli dell' altra il quadrato, l'altra toccherà il cerchio medesimo.

Dal punto D cada nel cerchio ABC la retta DB, che lo seghi, la DC, che lo incontri, e il rettangolo di BD e DE sia uguale al quadrato di DC. Questa nel punto C toccherà il cerchio ABC. TAV. V. *Fig.* 4.

Imperocchè tirata la tangente DG (*pr.* 17.), e i raggi FG, FC; sarà il quadrato di DG uguale al rettangolo di BD e DE (*pr.* 36.). Allo stesso rettangolo però è anche uguale il quadrato di DC. Sicchè sarà uguale il quadrato di DG a quello di DC; e quindi la retta DG a DC.

a DC. Poichè dunque i triangoli GDF, CDF hanno uguali i lati DG, DC, non meno che gli altri FG, FC, e la base DF comune; avranno uguali gli angoli G, e C (*pr.* 8. 1.). Ma l'angolo G è retto (*pr.* 18.). Sicchè retto sarà ancora l'angolo C. Per la qual cosa essendo la DC perpendicolare al raggio nell' estremo C, dovrà ivi toccare il cerchio ABC (*cor. pr.* 16.).

LIBRO IV.

DEFINIZIONI.

I. SE di una figura rettilinea ciascun angolo abbia il vertice nella circonferenza di un cerchio, si dirà il cerchio descritto intorno a tal figura, o vero tal figura descritta nel cerchio.

II. Se poi di una figura rettilinea ciascun lato tocchi il cerchio, si dirà il cerchio descritto nella figura, o la figura descritta intorno al cerchio.

III. Si dice in oltre *Adattata* nel cerchio la retta, che ha gli estremi nella circonferenza.

IV. Ed *Ordinata*, o vero *Regolare* si chiama la figura equilatera insieme, ed equiangola.

PROPOSIZIONE I.

In un dato cerchio adattare una retta data non maggiore del diametro.

Sia

14.). Ma poichè il raggio DM è uguale a DL, l'altro DN a DB, e l'angolo MDN è maggiore di LDB; sarà MN maggiore di LB (*pr.* 24. 1.). Sicchè sarà ancora HC maggiore di LB.

PROPOSIZIONE XVI.

Se sopra il diametro dal punto estremo s' alzi una perpendicolare, questa caderà fuori del cerchio; nè tra essa, e la circonferenza si potrà condurre altra retta; ma costituirà coll' arco convesso un angolo minore di ogni acuto rettilineo, siccome di ogni acuto rettilineo è maggiore l' angolo del semicerchio.

Dall' estremo A del diametro AB su di esso s' alzi la perpendicolare EF. Questa caderà fuori del cerchio ABC. Tav. IV. *Fig.* 10.

Perciocchè se prendasi in EF un punto qualunque G, e col centro D si congiunga; si avrà nel triangolo ADG l' angolo DAG retto, l' altro DGA acuto. Quindi il lato DG sarà maggiore di DA (*pr.* 19. 1.). Ma DA dal centro perviene alla circonferenza. Dunque DG dal centro anderà fuor di quella a terminare. E lo stesso avviene di ogni altro punto, che in EF si prenda. Sicchè la retta EF tutta caderà fuori del cerchio.

Se poi tra AF, ed AC possa da A tirarsi un' altra retta, sia AH; ed essendo acuto l'angolo DAH, verso la parte di esso dal centro D caderà la DI perpendicolare ad AH (*cor.* 2. *pr.* 32. 1.). Pertanto nel triangolo DAI sarà il raggio DA maggiore di DI (*pr.* 19. 1.), cioè del-

Nel cerchio ABC ſia uopo adattare una retta uguale a D. TAV.V *Fig.5.*

Condotto il diametro AB, ſe a D ſia uguale, ſi farà ſciolto il problema; ſe ſia maggiore, toltane la parte AE uguale a D (*pr.* 3. 1.), col centro A ed intervallo AE ſi deſcriva l' arco EC, e ſi congiunga AC, che ſarà la retta richieſta;

Perocchè e adattata nel cerchio ABC (*def.* 3.), ed uguale come ad AE, così a D (*aſ.*1.).

PROPOSIZIONE II.

In un dato cerchio deſcrivere un triangolo equiangolo a un triangolo dato.

Nel cerchio ABC ſia uopo deſcrivere un triangolo equiangolo al dato DEF. TAV.V *Fig. 6.*

Tirata per un punto qualunque B della circonferenza la tangente GH (*cor. pr.* 16. 3.), e fatto a quel punto l'angolo GBA uguale ad F, e l'altro HBC uguale a D (*pr.* 23. 1.), ſi tiri la retta AC. Il triangolo ABC ſarà il richieſto.

Perocchè l' angolo GBA, ſiccome coſtituito dalla tangente e dalla corda, è uguale all' angolo C nella porzione alterna ACB (*pr.* 32.3.). Ma lo ſteſſo GBA è uguale ad F. Dunque l'angolo C ſarà uguale ad F. Per la ragione medeſima l' angolo A è uguale a D. Sicchè ne' triangoli ABC, DEF il rimanente angolo B ſarà uguale al rimanente E (*cor.*4. *pr.* 32. 1.); onde il triangolo ABC, che nel dato cerchio è deſcritto (*def.* 1.), ſarà equiangolo al dato DEF.

PROPOSIZIONE III.

Intorno a un dato cerchio descrivere un triangolo equiangolo a un altro dato.

TAV.V. Fig.7. Debbasi intorno al cerchio ABC descrivere un triangolo equiangolo all'altro DEF.

Disteso il lato EF verso G ed H, e fatti al centro I gli angoli BIA uguale a DEG, BIC a DFH(*pr.* 23. 1.), per li punti A, B, C si conducano le tangenti KL, LM, MK (*cor.pr.*16.3.). Queste costituiranno il richiesto triangolo KLM.

Imperocchè essendo il raggio perpendicolare alla tangente (*pr.*18.3.), sarà retto come l'angolo IAL, così l'altro IBL. Di ogni quadrilatero però i quattro angoli uguagliano quattro retti (*cor.* 5. *pr.* 32. 1.). Sicchè gli angoli BIA, ed L uguaglieranno due retti. Ma a due retti sono anche uguali gli angoli DEG, DEF (*pr.* 13. 1.). Questi adunque saranno uguali agli angoli BIA, ed L; e perciò tolti gli uguali BIA, DEG, resterà l'angolo L uguale a DEF. Nella stessa maniera si dimostra l'angolo M uguale a DFE. Dunque il terzo K uguaglierà il terzo D (*cor.* 4. *pr.* 32. 1.). Laonde il triangolo KLM, che intorno al cerchio ABC è descritto (*def.* 2.), sarà equiangolo al dato DEF.

PROPOSIZIONE IV.

In un triangolo dato descrivere un cerchio.

TAV.V. Fig.8. Sia il triangolo ABC, nel quale si debba descrivere il cerchio. Gli

Gli angoli ABC, ACB si dividano per metà dalle rette BD, CD (*pr.* 9. 1.), che s' incòntrino in D; da D si abbassino sopra i lati AB, BC, CA le perpendicolari DE, DF, DG (*pr.* 12. 1.); col raggio DE si descriva il cerchio EFG; e questo sarà il richiesto.

Imperocchè essendo ne' triangoli BED, BFD il lato BD comune, e l'angolo DBE uguale a DBF, non meno che il retto DEB al retto DFB; sarà ancora il lato DE uguale a DF (*pr.* 26. 1.). Non altrimenti si dimostra DG uguale a DF. Sicchè il cerchio, che col raggio DE si descrive, passerà per F, e G. Ma in E, F, G i lati del triangolo, come perpendicolari a' raggi, toccano il cerchio EFG (*cor. pr.* 16. 3.). Questo adunque sarà descritto nel triangolo ABC (*def.* 2.).

PROPOSIZIONE V.

Intorno a un dato triangolo descrivere un cerchio.

Sia uopo intorno al triangolo ABC descrivere il cerchio. TAV. V. *Fig.* 9.

Si seghino per metà AB in D, AC in E (*pr.* 10. 1.); da D sopra AB, e sopra AC da E s'alzino le perpendicolari DF, EF (*pr.* 11. 1.); si tirino da F le rette FA, FB, FC; e il cerchio ABC, che col raggio FA si descrive, sarà il richiesto.

Perciocchè avendo i triangoli DBF, DAF il lato DF comune, gli altri DB, DA uguali, ed uguali gli angoli retti in D; avranno uguali le basi FB, FA (*pr.* 4. 1.). Per la ragione medesima

desima sono uguali FC, FA. Dunque il cerchio, che ha il raggio FA, passerà per B, e C; e quindi sarà descritto intorno al triangolo ABC (*def.* 1.).

Corol. Se del triangolo dato l' angolo A sia acuto, sarà nella porzione maggiore; se ottuso, nella minore; se retto, nel semicerchio (*pr.* 31. 3.). Pertanto nel primo caso il centro esisterà dentro il triangolo; nell' altro fuori; e nell' ultimo sarà il punto intermedio del lato, che all' angolo retto si oppone.

PROPOSIZIONE VI.

In un dato cerchio descrivere un quadrato.

Tav.V. *Fig.* 10. Nel cerchio ABC descriver si debba un quadrato.

Condotti a perpendicolo i diametri AC, BD, si congiunga AB, BC, CD, DA. La figura ABCD descritta nel dato cerchio (*def.* 1.) sarà il quadrato richiesto.

Perciocchè de' quattro triangoli, che hanno il vertice nel centro E, essendo uguali i lati, come raggi, e gli angoli compresi da que' lati, come retti; uguali ancora saranno le basi (*pr.* 4. 1.). Dunque il quadrilatero ABCD sarà equilatero. Ma per gli angoli retti ne' semicerchi è rettangolo. Dunque sarà quadrato.

PROPOSIZIONE VII.

Intorno a un dato cerchio descrivere un quadrato.

Sia

Sia il cerchio ABC, intorno al quale debbasi descrivere un quadrato. Tav. V. *Fig.* 11.

Tirati ad angoli retti i diametri AC, BD, su di essi s'alzino dagli estremi le perpendicolari FI, IH, HG, GF (*pr.* 11. 1.). Queste costituiranno il quadrato richiesto.

Imperocchè essendo retti gl' interni angoli, che dalla parte medesima fa la retta BD tra le perpendicolari FI, AC, GH; saranno queste tra se parallele (*pr.* 28. 1.). Per la stessa ragione sono parallele le altre FG, BD, IH. Sicchè i quadrilateri terminati da tali rette saranno parallelogrammi. Quindi sarà uguale il lato FI, e l'altro GH ad AC; siccome il lato FG, e l'altro IH a BD (*pr.* 34. 1.). Ma AC è uguale a BD. Dunque i lati FI, GH, FG, IH saranno parimente uguali. E ne' parallelogrammi minori gli angoli F, I, H, G opposti agli angoli retti in E sono retti. Dunque il quadrilatero FH, perchè equilatero e rettangolo, sarà quadrato. Di esso però ciascun lato, come perpendicolare al diametro nel suo estremo, tocca il cerchio ABC (*cor. pr.* 16. 3.). Per la qual cosa il quadrato FH intorno al dato cerchio ABC sarà descritto (*def.* 2.).

PROPOSIZIONE VIII.

In un dato quadrato descrivere un cerchio.

Descriver si debba un cerchio nel quadrato FH. Tav. V. *Fig.* 11.

Si dividano per metà FG ed FI in A e B (*pr.* 10. 1.); per A e B a' lati opposti del quadrato si conducano le parallele AC, BD (*pr.*

 31. 1.),

31. 1.), che si seghino in E; col centro E e intervallo EA si descriva il cerchio; e questo sarà il richiesto.

Imperocchè essendo FG ed FI tra se uguali, uguali saranno ancora le loro metà FA, AG, FB, BI (*as.* 5.). Essendo però AC parallela ad FI e GH, BD ad FG ed IH; i quadrilateri EF, EG, EI sono parallelogrammi. Di essi pertanto i lati EB, ED, EA, EC opposti agli uguali saranno uguali (*pr.* 34. 1.). Laonde il cerchio, che col centro E ed intervallo EA si descrive, passerà per B, C, D. Ma in questi quattro punti i lati del quadrato lo toccano (*cor. pr.* 16. 3.); mentre ivi sono perpendicolari a' diametri AC, BD. Dunque il cerchio ABCD nel quadrato FH sarà descritto (*def.* 2.).

PROPOSIZIONE IX.

Intorno a un dato quadrato descrivere un cerchio.

TAV. V. *Fig.* 10. Sia uopo intorno al quadrato ABCD descrivere un cerchio.

Congiunte le rette AC, BD, che si segheranno in E, se col centro E ed intervallo EA si descriva un cerchio, si sarà sciolto il problema.

Imperocchè avendo i triangoli ABC, ADC il lato AC comune, gli altri AB, AD uguali, ed uguali le basi BC, DC; avranno uguali gli angoli BAC, DAC (*pr.* 8. 1.); onde l' intero BAD dalla retta AC sarà per metà diviso. Non altrimenti si dimostrano divisi per metà gli angoli

goli B, C, D. Poichè questi adunque sono retti ed uguali, uguali altresì saranno e le loro metà (*as.* 5.), e i lati EA, EB, EC, ED, che a quelle si oppongono (*pr.* 6. 1.). Laonde il cerchio, che si costruisce col centro E ed intervallo EA, passerà per B, C, D; e quindi intorno al quadrato ABCD sarà descritto (*def.* 1.).

PROPOSIZIONE X.

Costituire un triangolo isoscele, che abbia ciascuno degli angoli uguali doppio del rimanente.

Prendasi una retta qualunque AB, e così in C si divida, che il rettangolo di AB e BC uguagli il quadrato di AC (*pr.* 11.2.); col centro A e intervallo AB si descriva il cerchio, e in quello si adatti la retta BD uguale ad AC (*pr.* 1.); si congiunga AD; e il triangolo ADB sarà il richiesto. TAV. V. *Fig.* 12.

Perocchè tirata la DC, si descriva un cerchio intorno al triangolo DCA (*pr.* 5.). E poichè il rettangolo della segante AB nella parte BC fuori del cerchio è uguale al quadrato di AC, o dell' uguale BD (*cor. pr.* 46. 1.), che dallo stesso punto B incontra la circonferenza stessa; sarà la BD tangente del cerchio ACD (*pr.* 37. 3.). E DC è una corda tirata nel medesimo cerchio. Sicchè l' angolo BDC sarà uguale all'angolo A nella porzione alterna DAC (*pr.* 32. 3.); ed aggiunto il comune ADC, i due BDC, ADC, o l' intero ADB uguaglierà i due A ed ADC. Or questi insieme sono uguali all' angolo esteriore DCB (*pr.* 32. 1.); e l'al-

l' altro ADB è uguale a B per l' uguaglianza de' raggi AB , AD (*pr.* 5. 1.). Dunque sarà uguale l'angolo DCB a B; e quindi il lato DB a DC (*pr.* 6. 1.), o vero AC a DC , e quindi l'angolo ADC ad A. Ma allo stesso A si è dimostrato uguale l' angolo BDC. Dunque l' intero ADB sarà doppio di A.

PROPOSIZIONE XI.

In un dato cerhio descrivere un pentagono regolare.

TAV.V. *Fig.* 13. Nel cerchio ABC descriver si debba un pentagono regolare.

Si costruisca il triangolo isoscele DEF, che abbia l' angolo E doppio di D (*pr.* 10.); nel dato cerchio si descriva il triangolo ABC equiangolo all' altro DEF (*pr.*2.); gli angoli ABC, ACB si seghino per metà dalle rette BH, CG (*pr.* 9. 1.); si conducano le altre AG , GB , AH , HC; ed il pentagono AGBCH descritto nel dato cerchio (*def.* 1.) sarà regolare.

Perocchè essendo nel triangolo isoscele ABC ciascuno degli angoli uguali e doppio del rimanente, e per metà diviso; è chiaro, che i cinque angoli ACG, GCB, BAC, CBH, HBA esser debbano tra se uguali. Ne' cerchi uguali però, e molto più nel medesimo cerchio gli angoli uguali alla circonferenza stanno sopra archi uguali (*pr.* 26. 3.). Uguali pertanto saranno e i cinque archi; e perciò anche le corde AG, GB, BC, CH, HA (*pr.* 29. 3.); onde il pentagono AGBCH sarà equilatero. Or se agli

agli archi uguali GB, AH si aggiunga il comune BCH, sarà l'intero GBCH uguale all'intero BCHA. Sicchè gli angoli alla circonferenza HAG, AGB, che stanno su di essi, saranno uguali (*pr.* 27. 3.). Nella stessa maniera uguali si dimostrano gli altri AGB, GBC, BCH, CHA. Sicchè il pentagono AGBCH sarà ancora equiangolo; e quindi sarà regolare (*def.* 4.).

PROPOSIZIONE XII.

Intorno a un dato cerchio descrivere un pentagono ordinato.

Debbasi descrivere un pentagono ordinato intorno al cerchio ACE. Tav.V. *Fig.* 14.

Descritto in esso il pentagono regolare ABCDE (*pr.* 11.); per li punti estremi di questo si conducano le tangenti FG, GH, HI, IK, KF (*cor. pr.* 16. 3.). Il pentagono FGHIK, che in tal modo descriverassi intorno al cerchio (*def.* 2.), sarà regolare.

Imperocchè dal centro L si tirino le rette LB, LH, LC, LI, LD. Ed essendo il raggio perpendicolare alla tangente (*pr.* 18. 3.), ne' triangoli LBH, LCH rettangoli in B e C sarà il quadrato di LH uguale come a i due di LB, e di BH; così a i due di LC, e di CH (*pr.* 47. 1.). Que' primi pertanto uguaglieranno questi; e tolti gli uguali de' raggi LB, LC, rimarrà e il quadrato di BH uguale a quello di CH; e quindi BH uguale a CH (*cor. pr.* 46. 1.). E' in oltre LB uguale ad LC, ed LH comune

ne a' triangoli LBH, LCH. Sarà adunque l'angolo BLH uguale a CLH, e l'altro BHL a CHL (*pr.* 8. 1.); onde l'intero BLC sarà doppio del solo CLH, e l'intero BHC del solo CHL. Similmente si dimostra l'angolo DLC doppio di CLI, e DIC di CIL. Poichè dunque uguali sono i doppj BLC, DLC, come posti sopra gli archi uguali BC, DC (*pr.*27.3.); uguali altresì saranno le metà CLH, CLI (*as.* 5.). E gli angoli retti in C sono parimente uguali, e il lato intermedio CL è comune a' triangoli CLH, CLI. Per la qual cosa sarà il lato CH uguale a CI, e l'angolo CHL a CIL (*pr.* 26. 1.). Quindi HI sarà doppio di CH. Per la ragione stessa GH è doppio di BH. Essendosi pertanto dimostrato BH uguale a CH, sarà ancora GH uguale ad HI (*as.* 4.). Non altrimenti uguali si dimostrano gli altri lati del pentagono FHK. Questo adunque sarà equilatero. Poichè però l'angolo BHC è doppio di CHL, e DIC di CIL; siccome CHL è uguale a CIL, così BHC sarà uguale a DIC. Convenendo pertanto la dimostrazione medesima a' rimanenti angoli del pentagono FHK, questo sarà altresì equiangolo. Laonde sarà ordinato (*def.* 4.).

PROPOSIZIONE XIII.

In un dato pentagono regolare descrivere un cerchio.

Tav.V. *Fig.*15. Nel pentagono ordinato ACE descriver si debba un cerchio.

Si

Si dividano per metà gli angoli BCD, CDE dalle rette CF, DF (*pr.* 9. 1.), che s' incontrino in F; da F sopra i lati del pentagono si abbassino le perpendicolari FG, FH, FI, FK, FL (*pr.* 12. 1.); col centro F ed intervallo FI si descriva il cerchio; e questo sarà il richiesto.

Imperocchè si congiungano FB, FA, FE. Ed avendo i triangoli CBF, CDF il lato CF comune, l'altro CB uguale a CD, e l'angolo BCF a DCF; avranno anche l'altro FBC uguale all'altro FDC (*pr.* 4. 1.). Ma l'intero CBA è uguale all'intero CDE. Come questo adunque di FDC, quello così sarà doppio di FBC. Quindi l'angolo CBA sarà da BF per metà diviso; non meno che gli altri BAE, AED da FA ed FE per la ragione medesima. Or poichè i triangoli FCH, FCI hanno il lato FC comune, ed uguali così gli angoli in C, come i retti in H ed I; avranno uguali i lati FH, FI (*pr.* 26. 1.). Poichè dunque per la medesima ragione sono uguali le altre perpendicolari; il cerchio, che si descrive col centro F ed intervallo FI, passerà ancora per H, G, L, K. In quei cinque punti però stando i lati del pentagono perpendicolarmente sopra i raggi, toccheranno il cerchio GIL (*cor. pr.* 16. 3.). Sicchè questo nel pentagono ACE sarà descritto (*def.* 2.).

PROPOSIZIONE XIV.

Descrivere un cerchio intorno a un dato pentagono regolare.

In-

TAV.V. Fig. 16. Intorno al pentagono regolare ACE sia uopo descrivere un cerchio.

Gli angoli BCD, CDE si dividano per metà dalle rette CF, DF (*pr.9.* 1.), che s'incontrino in F; col centro F e intervallo FC si descriva il cerchio; e questo sarà il richiesto.

Imperocchè congiunte FB, FA, FE, si dimostrerà come nella precedente, che tali rette seghino in parti uguali gli angoli CBA, BAE, AED; onde siccome tutti gli angoli del dato pentagono sono tra se uguali, uguali così saranno le loro metà (*as.* 5.). De' triangoli adunque, che hanno il vertice in F, essendo uguali gli angoli alle basi, saranno anche uguali i lati FA, FB, FC, FD, FE (*pr.6.* 1.). Perciò il cerchio fatto col raggio FC e passerà per li punti B, A, E, D, e sarà descritto intorno al pentagono dato (*def.* 1.).

PROPOSIZIONE XV.

In uno dato cerchio descrivere un essagono ordinato.

TAV.V. Fig. 17. Descriver si debba un essagono ordinato nel cerchio ACE.

Condotto per lo centro G il diametro AD, col centro D e intervallo DG si descriva l'arco CGE; si tirino i raggi EG, CG, e si prolunghino in B ed F; si congiungano AB, BC, CD, DE, EF, FA; e l' essagono ACE descritto nel cerchio (*def.* 1.) sarà regolare.

Perciocchè essendo il raggio GC uguale a GD, e l'altro DC allo stesso DG, il triangolo CDG sarà

farà equilatero. E' chiaro però, che il triangolo equilatero sia altresì equiangolo (*pr.*5.1.). Perchè dunque gli angoli del triangolo uguagliano due retti (*pr.* 32. 1.), l'angolo CGD dell'equiangolo uguaglierà di due retti la terza parte. Per la medesima ragione è la parte terza di due retti l'angolo DGE. Essendo adunque gli angoli EGC, EGF uguali a due retti (*pr.* 13. 1.), di due retti la terza parte farà ancora il rimanente angolo EGF. E gli angoli, che al vertice si oppongono, sono tra se uguali (*pr.*15. 1.). Sicchè uguali tra se saranno i sei angoli costituiti al centro G. Quei però star debbono sopra archi uguali (*pr.* 26. 3.). Uguali pertanto saranno i sei archi; e quindi ancora le sei corde AB, BC, CD, DE, EF, FA (*pr.* 29. 3.). Laonde equilatero farà l' essagono ACE. Ma se agli archi uguali BC, AF si aggiunga il comune CDEF, farà l'intero BDF uguale all' intero CEA. Poichè dunque uguali sono gli angoli, che alla circonferenza esistono sopra archi uguali (*pr.* 27. 3.); farà l' angolo FAB uguale ad ABC. Similmente uguali si dimostrano gli altri angoli dell' essagono ACE. Questo pertanto farà ancora equiangolo; e perciò farà ordinato (*def.* 4.).

Corol. Di tale essagono è manifesto, che il lato sia uguale al raggio del cerchio; e se per gli punti estremi di esso si conducano le tangenti, è in oltre manifesto, che d' intorno al cerchio si anderà a descrivere un essagono ordinato, non altrimenti che del pentagono si è detto; nè altrimenti in un dato essagono regolare de-

descriver si potrà il cerchio sia di dentro, sia di fuori.

PROPOSIZIONE XVI.

In un dato cerchio descrivere un quindecagono regolare.

TAV.V. *Fig.* 18. Sia uopo descrivere un quindecagono regolare nel cerchio ABC.

Si costruisca un triangolo equilatero, al quale si adatti nel cerchio l' equiangolo ABC (*pr.* 2.); di più si adatti il lato AD del pentagono ordinato (*pr.* 11.); indi l'arco DB si divida per metà in E (*pr.* 30. 3.); e se nel cerchio da B seguentemente si adattino delle corde uguali ad EB, si avrà il richiesto quindecagono.

Imperciocchè essendo uguali gli archi del cerchio terminati da corde uguali (*pr.* 28. 3.), l' arco AB sarà la terza parte, ed AD la quinta di tutta la circonferenza. Se questa adunque pongasi divisa in quindeci parti uguali, di quelle AD ne conterrà tre, ed AB cinque. Laonde DB contener ne dovrà due, ed EB una. Se pertanto si congiunga EB, e succedentemente nel cerchio si adattino delle corde ad EB uguali, si descriverà in esso un quindecagono equilatero insieme ed equiangolo, cioè ordinato (*def.* 4.).

Se poi per li vertici de' quindeci angoli si tirino le tangenti, descriverassi un altro quindecagono regolare d' intorno al cerchio, come del pentagono si è detto. Anzi somigliantemente descriver si potrà ancora un cerchio e nel quindecagono, e intorno al quindecagono ordinato.

L I.

LIBRO V.

DEFINIZIONI.

I. DI due grandezze tra ſe paragonate la minore *Parte*, e *Moltiplice* la maggiore ſi dice, quando la minore miſura la maggiore.

II. *Omogenee* poi ſi dicono le grandezze, che moltiplicate poſſono ſcambievolmente ſuperarſi.

III. E il rapporto di due grandezze omogenee ſecondo la quantoplicità ſi dice *Ragione*.

IV. Or *Simili* ſi chiamano le ragioni, nelle quali gli ugualmente moltiplici degli antecedenti ſono inſieme o uguali, o maggiori, o minori degli ugualmente moltiplici de' conſeguenti ſecondo qualunque moltiplicazione.

V. Ma ſe un moltiplice dell' antecedente ſuperando quello del conſeguente in una ragione, nell' altra l' ugualmente moltiplice dell' antecedente non ſuperi quello del conſeguente ſuo; la prima ragione ſi chiamerà *maggiore*, *minore* l'altra.

VI. La ſomiglianza in oltre delle ragioni; *Proporzione*; e le grandezze, che la coſtituiſcono, *Proporzionali* ſi dicono.

VII. E ſi dicono al fine *Omologhe* le grandezze antecedenti, non meno che le conſeguenti tra di se paragonate.

PRO-

PROPOSIZIONE I.

Se più grandezze ſieno ugualmente moltiplici di altrettante; quanto una è di una, tanto le prime inſieme preſe moltiplici ſaranno delle altre preſe inſieme.

Tav.V. Fig. 19. Sia AB tanto moltiplice di C, quanto DE di F. Le due AB, DE inſieme delle due inſieme C, F ſaranno tanto moltiplici, quanto AB di C, o DE di F.

Perciocchè eſſendo AB e DE di C ed F ugualmente moltiplici; quante parti conterrà AB uguali a C, tante uguali ad F ne doverà DE contenere. Ponganſi AG, GB le prime; DH, HE le altre. Sarà adunque la moltitudine delle parti AG, GB uguale alla moltitudine delle altre DH, HE. Ma per l'uguaglianza di AG e C, di DH ed F, AG con DH è uguale a C con F; ſiccome per l'uguaglianza di GB e C, di HE ed F, GB con HE è uguale a C con F. Sicchè quante parti ha AB uguali a C, o DE ad F; tante ne avrà AB con DE uguali a C con F. Per la qual coſa le due AB, DE delle due C, F inſieme ſaranno moltiplici ugualmente, che AB di C, o vero DE di F.

PROPOSIZIONE II.

Se di ſei grandezze la prima ſia tanto moltiplice della ſeconda, quanto la terza della quarta, e la quinta della ſeconda, quanto la ſeſta della quar-

quarta; la composta della prima e della quinta sarà della seconda tanto moltiplice, quanto della quarta è quella, che della terza e della sesta si compone.

Sia AB tanto di C moltiplice, quanto DE di F; e BG di C, quanto EH di F. Sarà tutta l' AG ugualmente di C moltiplice, che tutta la DH di F. TAV.V. *Fig.20.*

Perciocchè essendo AB e DE, non meno che BG ed EH ugualmente moltiplici di C ed F; quante ha parti AB uguali a C, altrettante uguali ad F ne avrà DE; e quante in oltre uguali a C ne ha BG, altrettante ne avrà EH uguali ad F. Quindi le parti tutte uguali a C, delle quali costa l' intera AG, uguaglieranno tutte le parti uguali ad F, delle quali l' intera DH si compone. E quindi tutta l' AG sarà ugualmente di C moltiplice, che tutta la DH di F.

PROPOSIZIONE III.

Se due grandezze sieno ugualmente moltiplici di altre due; le ugualmente moltiplici delle prime saranno ugualmente moltiplici anche delle altre.

Sia A tanto di B moltiplice, quanto C di D; ed EF di A, quanto GH di C. Sarà EF di B ugualmente moltiplice, che GH di D. TAV.VI. *Fig. 1.*

Perocchè essendo EF e GH ugualmente di A e C moltiplici; conterrà EF altrettante parti uguali ad A, quante GH ne contiene uguali a C. Ponganfi EI ed IF le prime, GK e KH le altre. Sarà adunque EI tanto di B moltiplice, quanto GK di D; ed IF di B, quan-

 to

to KH di D. Laonde tutta la EF sarà tanto di B moltiplice, quanto tutta la GH di D (*pr.* 2.).

PROPOSIZIONE IV.

Se due grandezze abbiano la medesima ragione ad altre due; le ugualmente moltiplici delle prime avranno ancor esse la ragione medesima alle ugualmente moltiplici delle altre secondo qualunque moltiplicazione.

Tav.VI. *Fig.* 2. Abbia A a C la ragione stessa, che B a D; ed E, F di A, B, e G, H di C, D sieno ugualmente moltiplici. Avrà E a G la stessa ragione, che F ad H.

Imperocchè se si prendano I, K ugualmente moltiplici di E, F, ed L, M di G, H; saranno altresì ugualmente moltiplici I, K di A, B, ed L, M di C, D (*pr.* 3.). Ma A è a C, come B a D. Se I adunque è uguale ad L, sarà K uguale ad M; se I è maggiore di L, sarà K maggiore di M; se I è minore di L, sarà K minore di M (*def.* 4.). Or I, K di E, F, ed L, M di G, H sono ugualmente moltiplici. Sicchè sarà E a G, come F ad H (*def.* 4.).

Corol. Da che le due I, K sono insieme uguali, o maggiori, o minori delle due L, M; siegue che queste altresì esser debbano insieme uguali, o maggiori, o minori di quelle. Queste però sono ugualmente moltiplici di C, D; quelle di A, B. Sarà pertanto C ad A, come D a B (*def.* 4.). Perciò se quattro grandezze sieno proporzionali; anche *Invertendo*, cioè pren-

prendendo i conseguenti per antecedenti e gli antecedenti per conseguenti, saranno proporzionali.

PROPOSIZIONE V.

Se una grandezza sia di un' altra tanto moltiplice, quanto una parte della prima di una parte dell' altra; la rimanente parte della prima sarà della rimanente dell'altra tanto moltiplice, quanto la prima è dell' altra.

Sia tutta l' AB moltiplice di CD ugualmente, che la parte EB di FD. Sarà la rimanente AE moltiplice di CF ugualmente, che tutta l' AB di CD. Tav. VI. *Fig.* 3.

Imperocchè se si faccia AE tanto moltiplice di DG, quanto EB di FD; sarà AB tanto di FG moltiplice, quanto EB di FD (*pr.*1.). Ma quanto EB di FD, altrettanto si pone AB moltiplice di CD. Sicchè sarà AB ugualmente moltiplice e di FG, e di CD. Laonde sarà uguale ed FG a CD, e DG a CF, tolta la comune FD. Or AE è tanto moltiplice di DG, o dell'uguale CF, quanto EB di FD. Siccome adunque EB di FD è ugualmente moltiplice, che AB di CD; sarà così AE ugualmente moltiplice di CF, che AB di CD.

PROPOSIZIONE VI.

Se di due grandezze sieno ugualmente moltiplici ed altre due, e due parti di esse; le parti rimanenti o uguaglieranno le prime, o saranno ugualmente moltiplici di quelle.

 Sieno

TAV.VI. *Fig.* 4. Sieno di C ed F ugualmente moltiplici e le grandezze AB, DE, e le loro parti GB, HE. Se la rimanente AG sia in oltre uguale a C, sarà DH uguale ad F.

Perocchè a DE si aggiunga EI uguale ad F. Ed essendo tanto di C moltiplice GB, quanto HE di F, e di più AG uguale a C, siccome EI ad F; sarà AB tanto di C moltiplice, quanto HI di F (*pr.* 2.). Ma AB tanto è moltiplice di C, quanto DE di F. Di F adunque sarà ugualmente moltiplice ed HI, e DE. Perciò sarà ed HI uguale a DE, ed EI a DH, tolta la comune HE. Ma EI è uguale ad F, Sicchè ad F sarà anche uguale DH.

Se poi AG sia moltiplice di *c*, similmente dimostrerassi DH altrettanto moltiplice di *f*,

PROPOSIZIONE VII.

Simili sono e le ragioni, che le grandezze uguali hanno alla medesima; e quelle, che alle uguali ha la medesima grandezza.

TAV.VI. *Fig.* 5. Sia A uguale a B. Sarà A a C, come B a C; e C ad A, come C a B.

Perocchè si prendano D, E ugualmente moltiplici di A, B, ed F comunque moltiplice di C. E poichè A e B sono tra se uguali, ugualmente parimente tra se saranno D ed E. Saranno pertanto insieme o uguali, o maggiori, o minori di F. Per la qual cosa sarà A a C, come B a C (*def.* 4.); e sarà invertendo C ad A, come C a B (*cor. pr.* 4.).

PRO-

PROPOSIZIONE VIII.

Delle grandezze disuguali la maggiore alla medesima ha ragione maggiore; ed al contrario la medesima grandezza alla maggiore ha ragione minore.

Sia AB maggiore di C, ed una terza grandezza D. AB a D avrà ragione maggiore, che C a D; ed avrà D ad AB ragione minore, che D a C. Tav.VI. *Fig.6.*

Imperciocchè tolta da AB la parte EB uguale a C, si prendano di AE, EB, e C tali ugualmente moltiplici FG, GH, ed I, che FG sia maggiore di D; e di D si prenda tal moltiplice K, che superi GH di una grandezza non maggiore della stessa D. E poichè GH ed I sono ugualmente moltiplici delle uguali EB e C, saranno tra se uguali. Ma K supera GH. Sicchè supererà anche l' uguale I. La grandezza però, della quale K supera GH, non è maggiore di D. Perchè dunque FG è maggiore di D, sarà tutta la FH maggiore di K. Or poichè FG, GH sono ugualmente moltiplici di AE, EB; sarà FH ugualmente di AB moltiplice, che GH di EB (*pr.* 1.), o vero I di C. Poichè dunque FH moltiplice di AB supera K moltiplice di D, ed I ugualmente moltiplice di C non supera la stessa K moltiplice di D; avrà AB a D ragione maggiore, C a D ragione minore (*def.* 5.).

Fatta poi la costruzione medesima è chiaro, che il moltiplice K del comune antecedente D

non ſuperi FH moltiplice di AB, ſuperi però I ugualmente moltiplice di C. Pertanto la ragione di D ad AB sarà minore, quella di D a C sarà maggiore.

PROPOSIZIONE IX.

Uguali ſono e le grandezze, che alla medeſima hanno la ragione ſteſſa; e quelle altresì, alle quali la grandezza medeſima ha la ſteſſa ragione.

Tav.VI. *Fig.*7. Sia A a C, come B a C; o vero C ad A, come C a B. Sarà A uguale a B.

Altrimenti ſe A foſſe di B maggiore, o minore; nè ſarebbe A a C, come B a C; nè C ad A, come C a B (*pr.*8.). Dunque A sarà uguale a B.

PROPOSIZIONE X.

Di due grandezze quella è maggiore, che ha ragione maggiore alla medeſima; o alla quale la medeſima grandezza ha ragione minore.

Tav.VI. *Fig.*8. Abbia A a C ragione maggiore, che B a C; o vero C ad A ragione minore, che C a B. Nell'uno e nell'altro caſo sarà A maggiore, B minore.

Altrimenti ſe A foſſe uguale a B, ſarebbe A a C, come B a C (*pr.*7.). E ſe foſſe minore, la ragione di A a C ſarebbe minore di quella di B a C (*pr.* 8.). Perchè dunque l'uno e l'altro è contro l'ipoteſi, sarà A maggiore di B.

Nell'altro caſo poi ſe foſſe A uguale a B, ſarebbe C ad A, come C a B (*pr.*7.). E ſe

se fosse minore, la ragione di C ad A sarebbe maggiore di quella di C a B (*pr*.8.). Sicchè ripugnando l'uno e l'altro, sarà A maggiore, B minore.

PROPOSIZIONE XI.

Le ragioni simili alla medesima sono tra se simili.

Sia A a B, come C a D; e come C a D, così E ad F. Sarà A a B, come E ad F. Tav.VI. *Fig.* 9.

Imperciocchè si prendano G, H, I ugualmente moltiplici di A, C, E; e K, L, M di B, D, F. Ed essendo A a B, come C a D; saranno le due G, H insieme uguali, o maggiori, o minori delle due K, L (*def*.4.). Parimente essendo E ad F, come C a D; le due I, H saranno insieme uguali, o maggiori, o minori delle due M, L. Sicchè le due G, I ancor esse dovranno essere insieme uguali, o maggiori, o minori delle due K, M. Laonde A sarà a B, come E ad F (*def*.4.).

PROPOSIZIONE XII.

Se più grandezze sieno tra se proporzionali, come una è ad una, così tutte le antecedenti insieme prese saranno alle conseguenti tutte prese insieme.

Sia A a B, come C a D, ed E ad F. Sarà A a B, come insieme le tre A, C, E alle tre B, D, F. Tav.VI. *Fig.*9.

Imperciocchè prendendosi G, H, I ugualmente moltiplici di A, C, E; e K, L, M di B, D, F;

D, F; per la proporzione delle date grandezze saranno le tre G, H, I insieme uguali, o maggiori, o minori delle tre K, L, M (*def.* 4.). Quindi prese insieme e le tre G, H, I, e le altre K, L, M, saranno quelle uguali a queste, se G sia uguale a K; e maggiori, se G sia maggiore di K; e minori al fine, se G di K sia minore. Ma G è tanto moltiplice di A, quanto insieme le tre G, H, I di A, C, E; e K di B, quanto insieme le tre K, L, M di B, D, F (*pr.* 1.). Dunque A sarà a B, come insieme le tre A, C, E alle tre B, D, F (*def.* 4.).

PROPOSIZIONE XIII.

Di due ragioni simili, se una è maggiore di una terza ragione, anche l' altra della terza stessa sarà maggiore.

TAV.VI. *Fig.* 10. Abbia A a B la stessa ragione, che C a D; e C a D ragione maggiore, che E ad F. Avrà A a B maggior ragione, che E ad F.

Imperocchè si prendano di C, E tali ugualmente moltiplici H, I, e tali L, M di D, F, che H superi L, ma I non superi M (*def.* 5.); e si prenda in oltre G tanto di A moltiplice, quanto H di C, e K di B, quanto L di D. Ed essendo A a B, come C a D; siccome H supera L, così G supererà K (*def.* 4.). Ma I non supera M. Essendo adunque G, I ugualmente moltiplici di A, E, e K, M di B, F; sarà la ragione di A a B maggiore di quella di E ad F. (*def.* 5.).

Se poi di due ragioni simili una sia minore della

della terza, nella stessa maniera si dimostrerà, che della terza medesima anche l'altra esser debba minore.

PROPOSIZIONE XIV.

Di quattro grandezze proporzionali le prime due sono insieme uguali, o maggiori, o minori delle due omologhe rimanenti.

Sia A a B, come C a D. Se A è uguale a C, sarà B uguale a D; se A è maggiore di C, sarà B maggiore di D; se A è minore di C, sarà B minore di D. Tav.VI. *Fig.* 11.

Perocchè essendo A uguale a C, sarà A a B, come C a B (*pr.* 7.). Ma A è a B, come C a D. Dunque sarà C a B, come C a D (*pr.* 11.). Quindi B sarà uguale a D (*pr.* 9.).

Essendo poi A maggiore di C, sarà la ragione di A a B maggiore di quella di C a B (*pr.* 8.). Ma A è a B, come C a D. Sicchè la ragione di C a D sarà ancor essa maggiore di quella di C a B (*pr.* 13.). Perciò sarà B maggiore di D (*pr.* 10.).

Se A finalmente sia minore di C, la ragione di A a B sarà minore dell'altra di C a B (*pr.* 8.). E' però A a B, come C a D. Pertanto anche la ragione di C a D sarà minore dell'altra di C a B (*pr.* 13.). Laonde B sarà minore di D (*pr.* 10.).

PRO-

PROPOSIZIONE XV.

Le ugualmente moltiplici sono tra se, come le loro parti.

TAV.VI. *Fig.*12. Sia AB tanto di C moltiplice, quanto DE di F. Sarà AB a DE, come C ad F.

Perciocchè essendo AB e DE ugualmente moltiplici di C ed F; conterrà AB altrettante parti uguali a C, quante uguali ad F la DE ne contiene. Pongansi le prime AG, GH, HB; le altre DI, IK, KE. Poichè dunque le uguali alle uguali hanno la ragione medesima; sarà AG a DI, come GH ad IK, come HB a KE. Sarà quindi AB a DE, come AG a DI (*pr.* 12.). Ma AG è a DI, come C ad F. Dunque AB sarà a DE, come C ad F (*pr.*11.).

PROPOSIZIONE XVI.

Le grandezze proporzionali Permutando, *paragonando cioè il primo antecedente al secondo in una ragione, e il primo conseguente al secondo nell' altra, rimangono proporzionali.*

TAV.VI. *Fig.* 13. Sia A a B, come C a D. Sarà permutando A a C, come B a D.

Imperocchè se si prendano E, F ugualmente moltiplici di A, B; sarà E ad F, come A a B (*pr.* 15.). Or come A a B, è così C a D. Sarà dunque E ad F, come C a D (*pr.* 11.). E prendendo G, H ugualmente moltiplici di C, D; si ha C a D, come G ad H. Dunque E sarà ad F, come G ad H. Per la qual cosa

fa E ed F faranno infieme uguali, o maggiori, o minori di G ed H (*pr.* 14.). Ma E ed F di A e B, G ed H di C e D fono ugualmente moltiplici. Sicchè A farà a C, come B a D (*def.* 4.).

PROPOSIZIONE XVII.

Le grandezze proporzionali Dividendo, *togliendo cioè i confeguenti dagli antecedenti, e paragonando le rimanenti grandezze a' confeguenti fteffi, fono altresì proporzionali.*

Sia AB a CB, come DE ad FE. Sarà dividendo AC a CB, come DF ad FE. TAV. VI. *Fig.* 14.

Perciocchè fe fi prendano GH, HI, LM, MN ugualmente moltiplici di AC, CB, DF, FE; farà GI tanto di AB moltiplice, quanto GH di AC, ed LN di DE, quanto LM di DF (*pr.* 1.). Ma quanto GH di AC, altrettanto è moltiplice LM di DF. Dunque farà GI tanto di AB moltiplice, quanto LN di DE. Or effendo HI ugualmente di CB moltiplice, che MN di FE, fe prendafi in oltre IO moltiplice di CB ugualmente, che NP di FE; farà HO tanto moltiplice di CB, quanto MP di FE (*pr.* 2.). Effendo adunque AB a CB, come DE ad FE; le due GI, LN faranno infieme uguali, o maggiori, o minori delle due HO, MP (*def.* 4.). Tolte però le comuni HI, MN, fe GI è uguale ad HO, refterà GH uguale ad IO, ed LM ad NP; fe GI è maggiore di HO, refterà GH maggiore di IO, ed LM di NP; fe GI è minore di HO, refterà GH minore di IO,

IO, ed LM di NP. Poichè dunque GH ed LM di AC e DF, IO ed NP di CB ed FE sono ugualmente moltiplici, sarà AC a CB, come DF ad FE (*def.* 4.).

PROPOSIZIONE XVIII.

Le grandezze proporzionali Componendo, *paragonando cioè gli antecedenti e i conseguenti presi insieme a' conseguenti medesimi, sono tra se proporzionali.*

TAV.VI. *Fig.*15. Sia AC a CB, come DF ad FE. Componendo sarà AB a CB, come DE ad FE.

Altrimenti sia AB a CB, come DE ad una qualunque GE maggiore di FE; e sarà dividendo AC a CB, come DG a GE (*pr.* 17.). Come però AC a CB, così è DF ad FE. Sicchè sarà DF ad FE, come DG a GE (*pr.* 11.). Ma DF è maggiore di DG. Sicchè anche FE sarà maggiore di GE (*pr.* 14.). E lo stesso assurdo siegue, se pongasi AB a CB, come DE ad un' altra qualunque *g*E minore di FE. Sarà pertanto AB a CB, come DE ad FE.

PROPOSIZIONE XIX.

Se due grandezze sieno tra se, come due delle loro parti; le parti rimanenti tra se saranno, come le due grandezze medesime.

TAV.VI. *Fig.*16. Sia AB a CD, come EB ad FD. Sarà la rimanente AE a CF, come AB a CD.

Imperocchè essendo AB a CD, come EB ad FD, sarà permutando AB ad EB, come CD

ad

ad FD (*pr.* 16.); e dividendo AE ad EB, come CF ad FD (*pr.* 17.); e di nuovo permutando AE a CF, come EB ad FD. Come però EB ad FD, così è AB a CD. Sarà adunque AE a CF, come AB a CD (*pr.* 11.).

Corol. Quindi se AB sia ad EB, come CD ad FD; sarà permutando AB a CD, come EB ad FD, e per la precedente dimostrazione come AB a CD, così AE a CF, e permutando di nuovo AB ad AE, come CD a CF. Per la qual cosa le grandezze, che tra se hanno proporzione, seguono ad averla *Convertendo*, paragonando cioè gli antecedenti alle grandezze, che da essi restano tolti i conseguenti.

PROPOSIZIONE XX.

Se tre grandezze sieno ad altre tre Ordinatamente *proporzionali, le prime saranno insieme uguali, o maggiori, o minori delle ultime.*

Sia A a B, come D ad E; B a C, come E ad F. Se A in oltre è uguale a C; sarà D uguale ad F; se A è maggiore di C, sarà D maggiore di F; se A è minore di C, sarà D minore di F. Tav. VI. *Fig.* 17.

Imperocchè essendo A uguale a C, sarà A a B, come C a B (*pr.* 7.). Come però A a B, così è D ad E. Sarà dunque D ad E, come C a B (*pr.* 11.). Or poichè B è a C, come E ad F; è invertendo C a B, come F ad E (*cor. pr.* 4.). Sarà pertanto D ad E, come F ad E; e quindi D sarà uguale ad F (*pr.* 9.).

Se

Se poi A pongasi maggiore di C, avrà A a B ragione maggiore, che C a B (*pr.* 8.). Ma A è a B, come D ad E. Sicchè D ad E avrà maggior ragione, che C a B (*pr.*13.). Ed essendo B a C, come E ad F; è invertendo C a B, come F ad E. Sicchè D avrà ad E maggior ragione, che F ad E; onde D sarà maggiore di F (*pr.* 10.).

Che se finalmente si ponga A minore di C, la ragione di A a B sarà minore di quella di C a B (*pr.* 8.). Or A è a B, come D ad E. Dunque la ragione di D ad E ancor essa sarà minore di quella di C a B (*pr.* 13.). Poichè però B è a C, come E ad F; è invertendo C a B, come F ad E. Dunque la ragione di D ad E sarà minore di quella di F ad E; e perciò D sarà minore di F (*pr.* 10.).

PROPOSIZIONE XXI.

Se tre grandezze ad altre tre abbiano proporzione Perturbata, *tal che di quelle la prima sia alla seconda, come la seconda di queste alla terza, e la seconda di quelle alla terza, come di queste la prima alla seconda; le due prime saranno insieme uguali, o maggiori, o minori delle due ultime.*

TAV.VI. *Fig.* 18. Sia A a B, come E ad F; B a C, come D ad E. Se è di più A uguale a C, sarà D uguale ad F; se A è maggiore di C, sarà D maggiore di F; se A è minore di C, sarà D minore di F.

Perciocchè essendo A uguale a C, sarà A a B, come C a B (*pr.* 7.). Ma A è a B, come

me E ad F. Sicchè ſarà C a B, come E ad F (*pr.* 11.). Ed eſſendo B a C, come D ad E; è invertendo C a B, come E a D (*cor.pr.* 4.). Dunque ſarà E a D, come E ad F; e ſarà quindi D uguale ad F (*pr.*9.).

Pongaſi ora A maggiore di C, e la ragione di A a B ſarà maggiore dell' altra di C a B (*pr.* 8.). Ma A è a B, come E ad F. Per la qual coſa anche la ragione di E ad F ſarà maggiore dell' altra di C a B (*pr.* 13.). Eſſendo però B a C, come D ad E; invertendo è C a B, come E a D. Sicchè la ragione di E ad F ſarà maggiore dell' altra di E a D; onde D ſarà maggiore di F (*pr.*10.).

Si ponga al fine A minore di C, ed avrà A a B minor ragione, che C a B (*pr.* 8.). Si ha però A a B, come E ad F. Dunque E ad F avrà minor ragione, che C a B (*pr.*13.). Or poichè B a C è, come D ad E; invertendo è C a B, come E a D. Avrà pertanto E ad F ragione minore, che E a D; e perciò D ſarà minore di F (*pr.*10.).

PROPOSIZIONE XXII.

Se più grandezze abbiano ordinata proporzione ad altrettante, Per Uguaglianza Ordinata, *o vero* Ordinando *le prime ſaranno proporzionali alle ultime*.

Sia A a B, come D ad E; B a C, come E ad F. Sarà ordinando A a C, come D ad F. TAV. VI. *Fig.*19.

Perciocchè ſe ſi prendano G, H ugualmente molti-

moltiplici di A, D, ed I, K di B, E, ed L, M di C, F; sarà G ad I, come H a K, I ad L, come K ad M (*pr.* 4.). Laonde saranno le due prime G, H insieme uguali, o maggiori, o minori delle due ultime L, M (*pr.* 20.). Ma le due G, H di A, D, e le due L, M sono di C, F ugualmente moltiplici. Sarà dunque A a C, come D ad F (*def.* 4.).

Sieno ora le grandezze A, B, C, D ordinatamente proporzionali alle altre E, F, G, H. E perchè A è a B, come E ad F, B a C, come F a G; ordinando sarà A a C, come E a G. Ma C è a D, come G ad H. Di nuovo adunque ordinando sarà A a D, come E ad H. E lo stesso raziocinio continuar si può per ogni qualunque numero di grandezze tra se ordinatamente proporzionali.

PROPOSIZIONE XXIII.

Di più grandezze perturbatamente proporzionali ad altrettante, le prime Per Uguaglianza Perturbata, *o vero* Perturbando *sono proporzionali alle ultime.*

Tav.VI. Fig.20. Sia A a B, come E ad F; B a C, come D ad E. Sarà perturbando A a C, come D ad F.

Imperocchè se si prendano G, H, I ugualmente moltiplici di A, B, D, e K, L, M di C, E, F; sarà G ad H, come A a B, L ad M, come E ad F (*pr.* 15.). Or A è a B, come E ad F. Sarà pertanto G ad H, come L ad M (*pr.* 11.). Essendo però H; I di B, D, e

D, e K, L ugualmente moltiplici di C, E; H è a K, come I ad L (*pr.* 4.). Sicchè essendo le tre grandezze G, H, K in proporzione perturbata colle tre I, L, M; saranno le due G, I insieme uguali, o maggiori, o minori delle due K, M (*pr.* 21.). Ma le due G, I di A, D, e le due K, M sono di C, F ugualmente moltiplici. Sarà dunque A a C, come D ad F (*def.* 4.).

Se poi la prima A sia alla seconda B, come un' intermedia qualunque I alla seguente K, B a C, come K ad L, C a D, come L ad M, e di più D ad E, come G ad H, E ad F, come H ad I; ordinando sarà A a D, come I ad M, e D ad F, come G ad I (*pr.* 22.). Per la qual cosa sarà perturbando A ad F, come G ad M. Nè altrimenti si dimostrano le prime proporzionali alle ultime in due qualunque serie di grandezze, che tra se abbiano proporzione perturbata.

PROPOSIZIONE XXIV.

Se di sei grandezze la prima sia alla seconda, come la terza alla quarta, e la quinta alla seconda, come la sesta alla quarta; sarà la composta della prima e della quinta alla seconda, come alla quarta è quella, che della terza e della sesta si compone.

Sia AB a C, come DE ad F; e BG a C, come EH ad F. Sarà tutta l' AG a C, come tutta la DH ad F. TAV. VI. *Fig.* 21.

Imperciocchè essendo AB a C, come DE ad F, e BG a C, come EH ad F, o vero invertendo C a BG, come F ad EH (*cor. pr.* 4.);

H sarà

sarà ordinando AB a BG, come DE ad EH (*pr.*22.), e componendo AG a BG, come DH ad EH (*pr.*18.). BG però è a C, come EH ad F. Sicchè di nuovo ordinando sarà AG a C, come DH ad F.

PROPOSIZIONE XXV.

La massima di quattro grandezze proporzionali e la minima sono maggiori delle due rimanenti.

TAV.VI. *Fig.*2. Sia la massima AB a CD, come E alla minima F. Le due AB ed F saranno maggiori delle due CD ed E.

Perciocchè fatta AG uguale ad E, e CH uguale ad F, sarà tutta l' AB a tutta la CD, come la parte AG alla parte CH; onde la rimanente GB alla rimanente HD sarà altresì, come tutta l'AB a tutta la CD (*pr.*19.). Ma AB è maggiore di CD. Sicchè GB sarà ancor essa maggiore di HD (*pr.* 14.). Or essendo AG uguale ad E, ed F uguale a CH; le due insieme AG ed F sono uguali alle due insieme E e CH (*as.* 2.). Se si aggiungano pertanto AG ed F alla maggiore GB, E e CH alla minore HD; saranno le due AB ed F maggiori delle due CD ed E.

COROL. I. Dalle cose finora dimostrate siegue primamente, che se di due ragioni una sia maggiore, ed una minore; debbasi l' antecedente della maggiore diminuire di una qualche parte, affinchè divenga proporzionale alle tre rimanenti grandezze.

TAV.VII. *Fig.* I. 2. Quindi se AB sia a C in ragione maggiore di D ad E, e la mentovata parte pongasi AX,

AX, tal che sia XB a C, come D ad E; invertendo sarà C ad XB, come E a D (*cor. pr.*4). Ma C ad AB è in ragione minore di C ad XB (*pr.* 8.). Sicchè sarà ancora C ad AB in ragione minore di E a D (*pr.* 13.); onde di due ragioni disuguali la maggiore invertendo diviene minore.

3. Permutando in oltre sarà XB a D, come C ad E (*pr.* 16.). Ma AB è a D in ragione maggiore di XB a D. Sarà pertanto AB a D in ragione maggiore di C ad E; onde di due ragioni disuguali la maggiore permutando rimane maggiore.

4. Se poi AB a CB abbia maggior ragione, che DE ad FE, e tolta AX sia XB a CB, come DE ad FE; sarà dividendo XC a CB, come DF ad FE (*pr.* 17.). Ha però AC a CB ragione maggiore, che XC a CB. Avrà dunque AC a CB ragione altresì maggiore, che DF ad FE; e perciò la ragione maggiore dividendo resta maggiore. Tav. VII. *Fig.* 2.

5. Nè altrimenti se AC a CB abbia maggior ragione, che DF ad FE, ed XC sia a CB, come DF ad FE; componendo sarà XB a CB, come DE ad FE (*pr.* 18.). Come adunque la ragione di AB a CB è maggiore di quella di XB a CB; sarà così maggiore dell'altra di DE ad FE; e perciò la ragione maggiore componendo resta maggiore.

6. Al contrario se AB a CB è in ragione maggiore di DE ad FE; sarà dividendo AC a CB in ragione maggiore di DF ad FE (*n.* 4.), ed invertendo CB ad AC in ragione minore di

FE a DF (*n.* 2.), e componendo AB ad AC in minor ragione di DE a DF (*n.* 5.). Per la qual cosa la ragione maggiore convertendo si muta in minore.

Tav. VII. *Fig.* 3. 7. Or se AB a CD è in maggior ragione di G ad H, e CD ad E in maggiore di H ad I, o di F a G; fatta ZD ad E, come H ad I, o F a G, ed XB a ZD, come G ad H, sarà ordinando XB ad E, come G ad I (*pr.*22.), o come F ad H perturbando (*pr.* 23.). Poichè dunque la ragione di AB ad E è maggiore di quella di XB ad E; sarà ancor maggiore dell' altra di G ad I, o di F ad H. Laonde le ragioni disuguali ordinando non meno, che perturbando non mutano la loro disuguaglianza, tal che la maggiore sia quella, che si ha dalle maggiori.

Tav. VII. *Fig.* 4. Corol. II. Se B sia ugualmente di A moltiplice, che D di C; sarà A a C, come B a D (*pr.* 15.), e permutando A a B, come C a D (*pr.* 16.). Dinoti A per rapporto alle grandezze B, C, D l'unità. E poichè D contener dee la grandezza C, quante volte B contiene A; se C tante volte si prenda, quante sono le unità di B, darà la grandezza D. Ma date due grandezze, la terza, che nasce da una di quelle tante volte presa, quante dell' altra sono le unità, dicesi *Prodotta* dalla *Moltiplicazione* delle due date. Sicchè D sarà prodotta da B moltiplicata per C.

2. Benchè però B e D non sieno perfettamente di A e C moltiplici; pure se A sia a B, come C a D, la quantoplicità di B e D per rispet-

rispetto ad A e C esser dee la medesima per l'indole della proporzione. Sempre che A adunque rappresenti l'unità, dovrà D rappresentare il prodotto di B per C. Onde generalmente se quattro grandezze sieno proporzionali, dinotandosi l'unità per la prima, per l'ultima si dinoterà il prodotto delle due intermedie tra se moltiplicate.

3. Sia ora l'unità A a B, come C a D; e la stessa A a B, come E ad F. Sarà C a D, come E ad F (*pr.* 11.), e permutando C ad E, come D ad F (*pr.*16.). Ma D è il prodotto di C moltiplicata per B, ed F il prodotto di E moltiplicata per la stessa B (*n.* 2.). Dunque le grandezze, che si moltiplicano per la grandezza medesima, seguono la ragione de' prodotti. TAV. VII. *Fig.* 5.

4. Sia di più la grandezza A a B, come C a D. Ed essendo il prodotto di A, D a quello di B, D, come A a B, e l'altro di C, B all'altro di D, B, come C a D (*n.*3.); sarà il prodotto di A, D a quello di B, D, come l'altro di C, B all'altro di D, B (*pr.* 11.). Ma il prodotto di B, D uguaglia quello di D, B. Sicchè l'altro di A, D uguaglierà l'altro di C, B (*pr.* 14.). Imperciò se quattro grandezze sieno proporzionali, il prodotto delle estreme sarà uguale al prodotto delle medie.

5. Scambievolmente se il prodotto di A, D sia uguale a quello di C, B; preso il terzo di B, D, sarà il primo di A, D al terzo di B, D, come l'altro di C, B al medesimo di B, D (*pr.* 7.). Ma il prodotto di A, D è a

quello di B, D, come A a B; e l' altro di C, B è a quello stesso di B, D, come C a D (*n*. 3.). Sarà dunque A a B, come C a D (*pr*. 11.). Imperciò se due prodotti sieno tra se uguali, si potranno risolvere in quattro grandezze proporzionali, prendendo da uno qualunque le due estreme, e le medie della proporzione dall' altro.

TAV. VII. *Fig*. 4. *6*. Ponganſi di nuovo D e B ugualmente moltiplici di C ed A; e sarà D a C, come B ad A. Quindi se A dinoti l' unità, si conterrà questa in B, quante volte C in D si contiene. E quindi se l' unità si prenda, quante volte C si contiene in D, si avrà la grandezza B. Or la grandezza, che nasce dall'unità tante volte presa, quante una di due date grandezze nell' altra si contiene, è il *Quoto* della *Divisione* di quelle. Sicchè B sarà il quoto di D divisa per C.

7. Sebbene però D e B non sieno di C ed A perfettamente moltiplici; se sia nondimeno D a C, come B ad A, per l'indole della proporzione D e B aver debbono la quantoplicità medesima in paragone di C ed A. Sempre che A adunque esprima l' unità, esprimerà B il quoto di D divisa per C. Onde generalmente se quattro grandezze sieno proporzionali, e l' ultima indichi l' unità; la terza indicherà il quoto della prima divisa per la seconda.

8. Poichè in oltre il quoto B espone, quanto C in D si contiene; espone certamente la quantoplicità di D per rispetto a C; e quindi la ragione di D a C (*def*. 3.). Per la qual

cosa

cosa il quoto dell' antecedente diviso per lo conseguente di una data ragione ed è l' *Esponente* della ragione medesima, ed assumer si può ad esattamente dinotarla.

9. Se A pertanto sia l' unità, B l' esponente della ragione di D a C, E quello dell' altra di F a C; sarà la ragione di D a C all' altra di F a C, come B ad E (*n.* 8.); e sarà ancora D a C, come B ad A, F a C, come E ad A (*n.* 7.). Permutando però D è a B, come C ad A; F ad E, come C ad A (*pr.* 16.); onde è D a B, come F ad E (*pr.* 11.); e di nuovo permutando D ad F, come B ad E. Sarà dunque la ragione di D a C all' altra di F a C, come D ad F (*pr.* 11.); le ragioni cioè, che hanno lo stesso conseguente, tra se sono, come gli antecedenti. TAV. VII. *Fig.* 6.

10. Se M poi sia l' esponente della ragione di C a D, N quello dell' altra di C ad F; sarà la ragione di C a D a quella di C ad F; come M ad N (*n.* 8.). Ma essendo in oltre C a D, come M ad A, C ad F, come N ad A (*n.* 7.); il prodotto di C, A esser dee uguale e a quello di D, M, e a quello di F, N (*n.* 4.); onde per l' uguaglianza de' prodotti di D, M, e di F, N esser dee M ad N, come F a D (*n.* 5.). Sarà pertanto la ragione di C a D all' altra di C ad F, come F a D (*pr.* 11.). E la ragione di F a D è l' *Inversa*, o la *Reciproca* di quella di D ad F. Sicchè le ragioni, che hanno lo stesso antecedente, sono tra se in ragion reciproca de' conseguenti.

11. Del resto siccome per gli esponenti di-

notar si possono le ragioni; possono così, quali semplici grandezze, tra di se paragonarsi. Laonde siccome le grandezze uguali alle uguali; le ragioni simili così paragonate alle simili costituiscono proporzione. E siccome al fine il quoto uguagliar dee l'unità, se la grandezza dividenda è uguale alla dividente; così se una ragione ha l'antecedente uguale al conseguente, aver dee per esponente l'unità.

112. Poichè dunque la ragione di uguaglianza ha l'unità per esponente; se a guisa delle grandezze si paragonino tra se le ragioni; è chiaro, che la quarta proporzionale dopo la ragione di uguaglianza e due altre date sia la prodotta dalla moltiplicazione di quelle due (*n.* 2.). Si chiami *Composizione* la moltiplicazione delle ragioni, *Componenti* le date, *Composta* la prodotta; specialmente poi *Duplicata* quella, che di due, *Triplicata* quella, che di tre, *Quadruplicata* quella, che di quattro ragioni uguali si compone; e ciascuna delle uguali per riguardo alla sua composta si chiami vicendevolmente *Sudduplicata*, *Suttriplicata*, *Suqquadruplicata*; e in somigliante maniera diasi la denominazione ad ogni altra ragione moltiplicata, o summoltiplicata di più alto grado.

Tav. VII. 113. Quindi se sieno tre grandezze A, B, C,
Fig. 7. e si prenda B uguale a B; sarà la ragione di B a B a quella di A a B, come B ad A, e l'altra di B a C all'altra di A a C, parimente come B ad A (*n.* 9.). Sarà dunque la ragione di B a B a quella di A a B, come l'altra di B a C all'altra di A a C (*pr.* 11.). Ma la prima di B a B è di uguaglianza. Sicchè

chè l' ultima di A a C sarà la composta delle intermedie (*n.* 12.).

14. Sia una quarta grandezza D, e presa C come seconda, la ragione di A a D si comporrà delle due di A a C, e di C a D (*n.* 13.). Quella però di A a C si compone delle due di A a B, e di B a C. Sicchè l' altra di A a D si comporrà delle tre di A a B, di B a C, di C a D. Così seguentemente. Dunque in ogni serie di grandezze la prima è all' ultima in ragione composta delle ragioni tutte, che hanno ordinatamente le grandezze precedenti alle seguenti dalla prima fino all' ultima stessa.

15. Pongansi tra se simili le ragioni tutte delle precedenti grandezze alle seguenti, tal che la serie de' termini continuamente proporzionali sia una *Progressione*; ed in essa la prima grandezza avrà alla terza ragione duplicata, alla quarta triplicata, alla quinta quadruplicata di quella, che ha la prima alla seconda. E scambievolmente la prima alla seconda, o qualunque grandezza intermedia alla sua seguente avrà ragione sudduplicata di quella, che la prima ha alla terza, suttriplicata di quella, che la prima ha alla quarta, suqquadruplicata di quella, che la prima ha alla quinta, e così successivamente (*n.* 12.).

16. Sia ora la ragione di X a D composta delle due di A a B, e di C a D. Se si prenda B uguale a B, la ragione di B a B sarà a quella di A a B, come l' altra di C a D alla composta di X a D (*n.* 12.). Ma la ragione di B a B è a quella di A a B, come B ad A; e TAV. VII. *Fig.* 8.

A ; e l' altra di C a D all' altra di X a D, come C ad X (*n. 9.*). Sarà dunque B ad A, come C ad X (*pr. 11.*). Quindi se la ragione composta abbia lo stesso conseguente, che ha una delle due componenti ; avrà per antecedente il quarto nella proporzione dopo i termini dell' altra componente inversa, e l' antecedente di quella, colla quale ha il conseguente comune.

17. Sia di più la ragione di M ad N composta delle due medesime, ed M il prodotto degli antecedenti A, C ; intantochè si abbia 1 ad A, come C ad M (*n. 2.*). E poichè presa la composta X a D, si ha B ad A, come C ad X (*n. 16.*) ; se le ragioni simili alle simili si paragonino, si avrà la prima di 1 ad A alla prima di B ad A, come la simile di C ad M alla simile di C ad X (*n. 11.*). Quella però di 1 ad A è a quella di B ad A, come 1 a B (*n. 9.*) ; e l' altra di C ad M all' altra di C ad X, come X ad M (*n. 10.*). Si avrà pertanto 1 a B, come X ad M (*pr. 11.*). Ma per la somiglianza delle ragioni, che delle medesime si compongono, X è a D, come M ad N, e permutando X ad M, come D ad N (*pr. 16.*). Sarà dunque 1 a B, come D ad N. Perciò N sarà il prodotto di B, D ; e perciò la ragione composta di altre due se ha per antecedente il prodotto degli antecedenti, per conseguente avrà il prodotto de' conseguenti di quelle.

18. Sia al fine la ragione di Q ad R composta delle due stesse, e Q il quoto di A diviso

viso per D; così che sia 1 a Q, come D ad A (*n.* 7.). E poichè per la somiglianza delle ragioni composte Q ad R, X a D si ha invertendo R a Q, come D ad X (*cor. pr.* 4.); paragonate tra se le ragioni simili, si avrà la prima di 1 a Q alla prima di R a Q, come la simile di D ad A alla simile di D ad X (*n.* 11.). Ma quella di 1 a Q è a quella di R a Q, come 1 ad R (*n.* 9.); e l' altra di D ad A all' altra di D ad X, come X ad A (*n.* 10.). Sicchè sarà 1 ad R, come X ad A (*pr.* 11.). Data però la composta X a D, si ha B ad A, come C ad X (*n.* 16.), e permutando B a C, come A ad X, ed invertendo C a B, come X ad A. Si avrà dunque 1 ad R, come C a B. Per la qual cosa R sarà il quoto di B diviso per C; e quindi se la ragione composta di altre due ha per antecedente il quoto dell' antecedente di una divisa per lo conseguente dell' altra, avrà per conseguente il quoto del conseguente della prima diviso per l' antecedente di quell' altra medesima.

19. Vicendevolmente se compor si debbano le due ragioni di A a B, e di C a D; si faccia B ad A, come C ad X. E se la ragione di X a D non sia la richiesta, pongasi esser quella di Z a D. Laonde sarà B ad A, come C a Z (*n.* 16.). Si ha però B ad A, come C ad X. Dunque si avrà C a Z, come C ad X (*pr.* 11.). Quindi sarà X uguale a Z; e la ragione di X a D sarà la composta delle date. Si avrà pertanto la ragione composta di due date ragioni, se dopo i termini di una in- TAV. VII. *Fig.* 9.

versa,

versa, e l' antecedente dell' altra si ritrovi il quarto proporzionale, e questo al conseguente dell' altra stessa come antecedente si paragoni.

20. In altra maniera si scioglierà il problema, se si prenda M prodotto degli antecedenti A, C, ed N de' conseguenti B, D. Perocchè se la richiesta ragione non sia quella di M ad N, bensì un' altra qualunque di M a Z; sarà Z il prodotto di B, D (*n.* 17.). Ma il prodotto medesimo è N. Sicchè N sarà uguale a Z; la ragione di M ad N sarà la composta delle date; e si avrà quindi una ragione composta di altre due, se i termini di una per quei dell' altra si moltiplichino.

21. Altrimenti ancora sodisfar si può al problema, se si ritrovi il quoto Q di A diviso per D, ed R di B diviso per C. Imperocchè se la ragione di Q ad R non si componga delle due date, si componga di quelle la ragione di Q a Z; e Z sarà il quoto di B diviso per C (*n.* 18.). Il quoto stesso però è R. Dunque R sarà uguale a Z; la ragione di Q ad R sarà la richiesta; e si comporrà quindi una ragione di altre due, se di una i termini per quei dell' altra inversa si dividano.

22. Che se debbansi comporre più date ragioni, e la composta di due per la terza, e quella che indi nasce per la quarta, e ciascuna delle prodotte seguenti per ciascuna delle rimanenti ragioni fino all' ultima si moltiplichi; o che tra 'l moltiplicarle costantemente una qualsivoglia delle leggi di composizione finora dichiarate, o che due di esse, o che ad arbitrio tutte

tre

tre si adoprino, terminato il calcolo troverassi la ragione richiesta.

23. Or sia di nuovo la ragione di X a D composta delle due di A a B, e di C a D; e di più sia B ad A, come C a D. Ed essendo B ad A, come C ad X (*n.* 16.); sarà C a D, come C ad X (*pr.* 11.), ed X uguale a D (*pr.* 9.). Per la qual cosa se di due ragioni componenti una sia simile all' altra inversa; quella, che di esse si compone, sarà ragione di uguaglianza. Tav.VII. *Fig.* 10.

24. Sia scambievolmente di uguaglianza la ragione composta di X a D; e sarà C ad X, come C a D (*pr.* 7.). E' però B ad A, come C ad X (*n.* 16.). Sarà pertanto B ad A, come C a D (*pr.* 11.). Laonde se una ragione composta di altre due sia di uguaglianza, delle due componenti sarà una simile all' altra inversa.

25. In oltre sia la ragione di X a D composta delle due di A a B, e di C a D; l' altra di Z a P composta delle altre di M ad N, e di O a P; ed A sia a B, come M ad N, o vero invertendo B ad A, come N ad M. E poichè esser dee B ad A, come C ad X, N ad M, come O a Z (*n.* 16.); sarà C ad X, come O a Z (*pr.* 11.). Come però C ad X, così la ragione di C a D è a quella di X a D; e come O a Z, così l' altra di O a P è all' altra di Z a P (*n.* 9.). La ragione adunque di C a D sarà a quella di X a D, come l' altra di O a P all' altra di Z a P; e permutando quella di C a D a quella di O a P, come l' altra Tav.VII. *Fig.* 11.

tra

tra di X a D all' altra di Z a P. Imperciò se una di due ragioni componenti sia simile ad una di altre due; come l'altra delle componenti all'altra, sarà così la ragione composta delle prime a quella, che delle altre si compone.

26. E se date le componenti medesime sia vicendevolmente la ragione di C a D a quella di O a P, come la composta di X a D alla composta di Z a P; sarà permutando quella di C a D a quella di X a D, come l'altra di O a P all'altra di Z a P. Poichè dunque le due prime sono tra se, come C ad X, e le altre due, come O a Z (*n.* 9.); sarà C ad X, come O a Z (*pr.* 11.). Ma poichè esser dee B ad A, come C ad X, ed N ad M, come O a Z (*n.* 16.); è uopo altresì, che sia B ad A, come N ad M, ed invertendo A a B, come M ad N. Se una pertanto di due ragioni componenti sia ad una di altre due, come la composta delle prime alla composta delle altre; la rimanente delle prime esser dovrà simile alla rimanente delle altre.

Tav.VII. *Fig.* 12. 27. Di più se date due progressioni di un qualunque ugual numero di grandezze A, B, C, D, ed M, N, O, P sia A a B, come M ad N; per la scambievole somiglianza delle ragioni rimanenti sarà ordinando A a D, come M a P (*pr.* 22.). Perchè dunque le ragioni di A a D, e di M a P sono ugualmente moltiplicate di quelle di A a B, e di M ad N (*n.* 15.); è chiaro, che simili tra se sieno le ragioni ugualmente moltiplicate di ragioni simili.

28. E simili sono al fine le ugualmente summolti-

moltiplicate delle simili. Altrimenti se A fosse a D, come M a P, ed al contrario A a B in ragione maggiore di M ad N; le ragioni seguenti nella prima progressione sarebbono ancor esse maggiori delle ragioni corrispondenti nell'altra. Laonde sarebbe ordinando (*n.7. cor. prec.*) A a D in ragione maggiore di M a P contro l'ipotesi.

LIBRO VI.

DEFINIZIONI.

I. SI chiamano *Simili* le figure rettilinee, che hanno ciascun angolo uguale a ciascuno, e proporzionali i lati intorno agli angoli uguali.

II. Quelle poi, che hanno un angolo uguale ad uno, e intorno ad essi di più i lati reciprocamente proporzionali, *Reciproche* si chiamano.

III. Una retta linea in oltre dicesi *Segata in ragione media ed estrema*, se è segata così, che tutta sia ad una parte, come la parte stessa alla rimanente.

IV. Ed *Altezza* della figura si dice la perpendicolare, che dal vertice cade su la base.

PROPOSIZIONE I.

I triangoli, e i parallelogrammi ugualmente alti sono tra se, come le basi.

Abbia-

AV. VII. *Fig.* 13. Abbiano i triangoli ABC, ADC, ed i parallelogrammi CE, CF la medesima altezza AG. Siccome la base BC è alla base CD, sarà così ed il triangolo ABC al triangolo ADC, ed il parallelogrammo CE al parallelogrammo CF.

Imperocchè prolungata la BD verso I e K, e fatta BH, ed HI uguali a BC, e DK uguale a DC, se si conducano le rette AI, AH, AK; per l'uguaglianza delle basi saranno tra se uguali ed i triangoli AIH, AHB, ABC, e gli altri ACD, ADK (*pr.* 38. 1.). Quanto adunque la base IC di BC, e l'altra CK di CD; altrettanto il triangolo AIC sarà moltiplice del triangolo ABC, e l'altro ACK dell'altro ACD. Or se IC è uguale a CK, sarà il triangolo AIC uguale ad ACK, e se IC è maggiore, o minore di CK, il triangolo AIC sarà maggiore altresì, o minore di ACK. Per la qual cosa sarà, come la base BC a CD, così il triangolo ABC ad ACD (*def.* 4. 5.).

Ma i triangoli ABC, ACD sono le metà de' parallelogrammi CE, CF (*pr.* 41. 1.); i quali perciò seguono de' triangoli medesimi la ragione (*pr.* 15. 5.). Come adunque la base BC a CD, sarà così il parallelogrammo CE a CF (*pr.* 11. 5.).

PROPOSIZIONE II.

Nel triangolo la retta, che alla base è parallela, sega i lati in parti proporzionali; e quella, che in parti proporzionali sega i lati, è parallela alla base.

Nell'

Nel triangolo ABC ſia DE parallela a BC. Sarà AD a DB, come AE ad EC. Tav.VII. *Fig.* 14.

Imperocchè ſi congiungano le rette DC, EB. E poichè uguali ſono i triangoli DEB, DEC poſti su la baſe DE, e tra le parallele DE, BC (*pr.* 37. 1.); ſarà il triangolo ADE a DEB, come lo ſteſſo ADE a DEC (*pr.* 7. 5.). Si ha però come la baſe AD a DB, così il triangolo ADE all'ugualmente alto DEB; e come la baſe AE ad EC, così lo ſteſſo ADE all'ugualmente alto DEC (*pr.* 1.). Si avrà pertanto AD a DB, come AE ad EC (*pr.* 11.5.).

Si abbia poi AD a DB, come AE ad EC. Ed eſſendo il triangolo ADE a DEB, come AD a DB, e lo ſteſſo ADE a DEC, come AE ad EC (*pr.* 1.); ſarà il triangolo ADE a DEB, come lo ſteſſo ADE a DEC (*pr.* 11.5.). Perciò uguali tra ſe ſaranno i triangoli DEB, DEC (*pr.* 9. 5.); e le rette DE, BC ſaranno perciò tra se parallele (*pr.* 39. 1.).

PROPOSIZIONE III.

La baſe del triangolo ſi divide proporzionalmente a' corriſpondenti lati dalla retta, che per metà divide l'angolo oppoſto; e queſto per metà ſi divide dalla retta, che proporzionalmente a' corriſpondenti lati divide la baſe.

Nel triangolo ABC ſia diviſo in parti uguali l'angolo BAC dalla retta AD. Sarà della baſe la parte BD a DC, come il corriſpondente lato BA ad AC. Tav.VII. *Fig.* 15.

Imperocchè ſe per C ſi conduca la CE pa-

rallela a DA (*pr.* 31. 1.); sarà l' angolo ECA uguale all' alterno CAD. E se il lato BA si prolunghi in E; sarà l' angolo E uguale all' esterno DAB (*pr.* 29. 1.). Siccome adunque i due CAD, DAB sono uguali; uguali così saranno i due ECA ed E. Quindi uguali saranno le rette AC, AE (*pr.* 6. 1.); e quindi BA sarà ad AC, come BA ad AE (*pr.* 7. 5.). Come però BA ad AE, è così BD a DC (*pr.* 2.). Come adunque BD a DC, sarà così BA ad AC (*pr.* 11. 5.).

Che se BD sia a DC, come BA ad AC; fatta la costruzione medesima sarà ancora BD a DC, come BA ad AE (*pr.* 2.). Sarà pertanto BA ad AC, come BA ad AE (*pr.* 11. 5.); ed AC uguale ad AE (*pr.* 9. 5.); e l' angolo ECA uguale ad E (*pr.* 5. 1.). Ma l'angolo ECA è uguale all'alterno CAD, ed E all'esterno DAB (*pr.* 29. 1.). Sicchè gli angoli CAD, DAB saranno tra se uguali; e la retta AD, che sega la base BC in parti proporzionali a' lati corrispondenti, segherà per mezzo l'opposto angolo BAC.

PROPOSIZIONE IV.

I triangoli tra se equiangoli hanno proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali; e que' lati, che agli angoli uguali si oppongono, sono gli omologhi nella proporzione.

TAV. VII. *Fig.* 16. Sieno tra se equiangoli i triangoli ABC, DCE. I lati di essi intorno agli angoli uguali saranno proporzionali; e gli omologhi saranno

no AB e DC, BC e CE, CA ed ED.

Perciocchè ponganſi a dirittura le baſi BC, CE. E poichè l'angolo BCA è uguale ad E; aggiunto il comune B, ſaranno i due B e BCA uguali a i due B ed E. Ora i primi ſono minori di due retti (*pr.*17.1.). Sicchè anche gli altri. Imperciò ſe le rette BA, ED ſi diſtendano, s'incontreranno in F (*cor.pr.*28.1.). Conciossiachè però l' angolo B è uguale all' eſterno DCE, le rette FB, DC ſono tra ſe parallele; ſiccome parallele ſono le altre FE, AC, conciossiachè l'angolo E è uguale all'eſterno ACB (*pr.*28. 1.). Per la qual coſa lo ſpazio AD ſarà parallelogrammo. Quindi FA è uguale a DC (*pr.*34. 1.); e quindi AB ſi ha ad FA, come AB a DC (*pr.*7. 5.). Ma nel triangolo BFE per le parallele AC, FE ſi ha AB ad FA, come BC a CE (*pr.*2.). Si avrà pertanto AB a DC, come BC a CE (*pr.*11.5.); e permutando AB a BC, come DC a CE (*pr.* 16. 5.). Non altrimenti ſi dimoſtra BC a CA, come CE ad ED. Ordinando adunque ſarà ancora AB a CA, come DC ad ED (*pr.*22.5.).

PROPOSIZIONE V.

I triangoli, che hanno i lati ordinatamente proporzionali, ſono tra ſe equiangoli; ed hanno uguali gli angoli, che a' lati omologhi ſtanno incontro.

Ne' triangoli ABC, DEF ſia il lato AB a BC, come DE ad EF; BC a CA, come EF ad FD. Saranno uguali gli angoli A e D, B e DEF, C ed EFD.

TAV.VI *Fig.* 17.

 Per-

Perciocchè fatto l' angolo FEG uguale a B; ed EFG uguale a C (*pr.* 23. 1.), sarà il rimanente G uguale al rimanente A (*cor.*4.*pr.*32.1.). Laonde AB sarà a BC, come GE ad EF; e BC a CA, come EF ad FG (*pr.* 4.). Si pone però AB a BC, come DE ad EF; e BC a CA, come EF ad FD. Sarà pertanto GE ad EF, come DE ad EF; ed EF ad FG, come EF ad FD (*pr.* 11. 5.). Quindi il lato GE sarà uguale a DE, ed FG ad FD (*pr.* 9. 5.). Ma la base EF è comune a' triangoli GEF, DEF. Questi adunque, perchè tra se equilateri, tra se parimente equiangoli saranno (*pr.* 8. 1.). Ed il primo è equiangolo al triangolo ABC. Sicchè anche l' altro.

PROPOSIZIONE VI.

I triangoli, che hanno un angolo uguale ad uno, e dintorno ad essi i lati proporzionali, tra se sono equiangoli; ed hanno uguali gli angoli, che a' lati omologhi si oppongono.

Tav.VII. Fig. 18. Ne' triangoli ABC, DEF sia l'angolo A uguale ad EDF; ed AB ad AC, come DE a DF. Sarà ancora l' angolo B uguale ad E, e C a DFE.

Perocchè costituito l' angolo FDG uguale ad A, e DFG a C (*pr.* 23. 1.), per l' uguaglianza de' rimanenti angoli G, B (*cor.* 4. *pr.* 32. 1.) si avrà DG a DF, come AB ad AC (*pr.* 4.). Or come AB ad AC, si ha così DE a DF. Si avrà adunque DG a DF, come DE a DF (*pr.* 11. 5.); onde DG sarà uguale a DE (*pr.* 9. 5.).

9. 5.). Ma DF è comune a' triangoli DGF, DEF; e l'angolo FDG, perchè uguale ad A, è altresì uguale ad EDF. Sicchè uguali saranno e gli angoli DFG, DFE, e gli altri G, E (*pr.* 4. 1.). L'angolo G però è uguale a B, e DFG a C. Pertanto anche l' angolo B sarà uguale ad E, e C a DFE.

PROPOSIZIONE VII.

I triangoli, che hanno due angoli tra se uguali, proporzionali i lati dintorno ad altri due, e i due restanti o minori insieme, o non minori del retto, tra se sono equiangoli; ed hanno uguali gli angoli, intorno a' quali esistono i lati proporzionali.

De' triangoli ABC, DEF sieno uguali gli angoli A e D; dintorno agli altri ABC ed E sia AB a BC, come DE ad EF; e de' restanti due C ed F ciascuno sia minore del retto. Sarà ancora l' angolo ABC uguale ad E, e C ad F. TAV. VII. *Fig.* 19.

Altrimenti se l' angolo ABC di E sia maggiore; fatto l'altro ABG uguale ad E (*pr.* 23. 1.), per l' uguaglianza de' due A e D sarà il terzo BGA uguale al terzo F (*cor.* 4. *pr.* 32. 1.). Si avrà perciò AB a BG, come DE ad EF (*pr.* 4.). Or come DE ad EF, si pone così AB a BC. Si avrà adunque AB a BG, come AB a BC (*pr.* 11. 5.); onde sarà e BG uguale a BC (*pr.* 9. 5.), e l'angolo BGC uguale a C (*pr.* 5. 1.). Questo però è minore del retto. Dunque ancor quello. E l'angolo BGA,

ſiccome uguale ad F, del retto altresì è minore. Sicchè i due angoli BGC , BGA ſono minori di due retti. La qual coſa ripugnando (*pr.* 13. 1.), ripugna che gli angoli ABC ed E non ſieno tra se uguali.

Se poi gli angoli C ed F ſieno non minori del retto; fatta la ſteſſa coſtruzione ſimilmente ſi dimoſtrerà, che nel triangolo GBC i due angoli BGC e C ſieno uguali, e quindi non minori di due retti. La qual coſa parimente ripugnando (*pr.* 17. 1.), ſiegue che uguali ſieno gli angoli ABC ed E, non meno che gli altri C ed F.

PROPOSIZIONE VIII.

I triangoli, ne' quali ſi divide un triangolo rettangolo, abbaſſando la perpendicolare dall' angolo retto su la baſe, ſono ed al tutto ſimili, e tra se.

TAV.VII. *Fig.* 20. Dal vertice A dell'angolo retto ſia tirata nel triangolo ABC la perpendicolare AD su la baſe BC. I triangoli ABD ; ADC ſaranno ed al tutto ABC, e tra ſe ſimili.

Imperciocchè i triangoli ABD, ABC avendo l' angolo B comune, uguali i retti ADB, BAC (*aſ.* 9.), ed uguali quindi i rimanenti BAD e C (*cor.* 4. *pr.* 32. 1.); ſono equiangoli. Di più i triangoli ADC, ABC avendo comune l' angolo C, i retti ADC, BAC uguali, ed uguali i rimanenti DAC e B; ancor eſſi ſono tra se equiangoli. Ed equiangoli ſono al fine i triangoli ABD, ADC per l' uguaglianza e degli angoli retti in D, e de' due BAD e C, e

C, e de' due DAC e B. Sicchè i primi, e gli altri, non meno che gli ultimi ed avranno proporzionali i lati intorno agli angoli uguali (*pr.* 4.); e perciò simili tra se saranno (*def.* 1.).

Corol. Poichè però in tali triangoli i lati omologhi sono quei, che agli angoli uguali si oppongono (*pr.* 4.); sarà BD a BA, come BA a BC; DC a CA, come CA a CB; e BD a DA, come DA a DC. Come adunque ciascun de' lati del triangolo rettangolo sarà medio proporzionale tra la base, e la corrispondente parte di essa; la perpendicolare così sarà media proporzionale tra le parti della base medesima.

PROPOSIZIONE IX.

Da una data retta linea togliere una parte proposta.

Sia la retta AB, dalla quale toglier si debba la parte terza. Tav. VI. *Fig.* 21.

Al punto A di essa in un angolo qualunque pongasi una retta AC; in questa si prenda ad arbitrio un punto D, e seguentemente DE ed EF uguali ad AD; si conduca la FB, e per D la DG parallela ad FB (*pr.* 31. 1.). Sarà AG la parte richiesta.

Perocchè sarà AG a GB, come AD a DF (*pr.* 2.). Ma DF è doppia di AD. Dunque di AG sarà doppia GB, ed AB tripla.

PROPOSIZIONE X.

Segare una data retta proporzionalmente alle parti di un' altra retta data.

AV. VII. Fig. 22. La retta AB sia segata in D ed E; e proporzionalmente segar si debba la retta AC.

Si costituisca di ambedue un qualsivoglia angolo A; e tirata la BC, per D ed E si tirino DF ed EG parallele a BC (*pr.* 31. 1.)). In F e G si avranno le richieste sezioni.

Perocchè essendo DF ed EG parallele a BC, saranno tra se parallele (*pr.* 30. 1.). Laonde nel triangolo AEG sarà come AD a DE, così AF ad FG (*pr.* 2.). Ma se per D si tiri DH parallela ad FC; ne' parallelogrammi DG ed IC sarà DI uguale ad FG, ed IH a GC (*pr.* 34. 1.); onde sarà DI ad IH, come FG a GC (*pr.* 7. 5.). Poichè dunque nel triangolo DBH si ha DE ad EB, come DI ad IH; si avrà ancora come DE ad EB, così FG a GC (*pr.* 11. 5.).

PROPOSIZIONE XI.

Date due linee rette ritrovare la terza proporzionale.

AV. VII. Fig. 23. Sia uopo trovare una retta, che nella proporzione continua sia la terza dopo le date AB ed AC.

Pongansi queste in un angolo A; si distendano verso D ed E; si faccia BD uguale ad AC; si tiri

si tiri la BC, e per D la DE parallela a BC (*pr.* 31. 1.). Ed essendo AB a BD, come AC a CE (*pr.* 2.); per l'uguaglianza delle due BD, AC sarà parimente AB ad AC, come AG a CE.

PROPOSIZIONE XII.

Date tre linee rette ritrovare la quarta proporzionale.

Sieno le tre rette AB, BC, AD, e trovar si debba la quarta, che con esse costituisca proporzione. TAV. VII. *Fig.* 24.

Le prime due AB, BC si pongano e tra se a dirittura, ed in un angolo A colla terza AD; questa si prolunghi in E; si conduca la BD, e per C la CE parallela a BD (*pr.* 31. 1.). Sarà AB a BC, come AD a DE (*pr.* 2.).

PROPOSIZIONE XIII.

Tra due date linee rette trovare la media proporzionale.

Sia uopo ritrovare una retta, che nella proporzione continua sia la media tra le date AB e BC. TAV. VII. *Fig.* 25.

Sopra di esse poste per diritto si descriva il semicerchio ADC; e da B s'innalzi sopra AC la perpendicolare BD (*pr.* 11. 1.). Questa sarà la media richiesta.

Perciocchè se si congiungano AD, DC; si avrà nel semicerchio l'angolo retto ADC (*pr.* 31. 3.). Foichè dunque dal vertice D su la base

base del triangolo rettangolo DAC si è abbassata la perpendicolare DB; sarà AB a BD, come BD a BC (*cor. pr.* 8.).

PROPOSIZIONE XIV.

I parallelogrammi uguali, che hanno un angolo uguale ad uno, dintorno ad essi hanno i lati reciprocamente proporzionali; e i parallelogrammi, che dintorno a due angoli uguali hanno i lati reciprocamente proporzionali, sono uguali.

Tav. VIII. Fig. 1. Ne' parallelogrammi uguali AB, CD sieno uguali gli angoli AEB, CED. Sarà AE ad ED, come CE ad EB.

Imperocchè si pongano per diritto i lati AE, ED: Ed essendo uguali a due retti gli angoli AEB, BED (*pr.* 13. 1.); a due retti parimente uguali saranno gli altri CED, BED (*as.* 2.); onde i lati CE, EB ancor essi giaceranno in diretto (*pr.* 14. 1.). Quindi se si compia il parallelogrammo EF; sarà uno degli uguali AB ad EF, come l'altro CD allo stesso EF (*pr.* 7. 5.). Ma il parallelogrammo AB all'ugualmente alto EF si ha, come la base AE ad ED; e l'altro CD all'ugualmente alto EF, come la base CE ad EB (*pr.* 1.). Si avrà pertanto AE ad ED, come CE ad EB (*pr.* 11. 5.).

Vicendevolmente se intorno agli angoli uguali AEB, CED si abbia AE ad ED, come CE ad EB; fatta la costruzione medesima si avrà come la base AE ad ED; così il parallelogrammo AB all'ugualmente alto EF; e come la base CE ad EB, così l'altro CD allo stesso EF (*pr.* 1.).

(*pr.* 1.). Laonde sarà ed il parallelogrammo AB ad EF, come l'altro CD allo stesso EF (*pr.* 11. 5.); e quindi il parallelogrammo AB uguale a CD (*pr.* 9. 5.).

PROPOSIZIONE XV.

I triangoli uguali, che hanno un angolo uguale ad uno, dintorno ad essi hanno reciprocamente proporzionali i lati; e que' triangoli, che hanno i lati reciprocamente proporzionali dintorno a due angoli uguali, sono tra se uguali.

De' triangoli uguali ABC, DCE sieno uguali gli angoli BCA, ECD. Sarà il lato BC a CD, come EC a CA. Tav. VIII. *Fig.* 2.

Imperocchè se a dirittura ponghansi i lati BC, CD; a due retti saranno uguali gli angoli BCA, ACD (*pr.* 13. 1.), non meno che gli altri ECD, ACD (*as.* 2.); onde per diritto esisteranno anche i lati AC, CE (*pr.* 14. 1.). Or se si congiunga AD, si avrà uno de' triangoli uguali ABC ad ACD, come l'altro DCE allo stesso ACD (*pr.* 7. 5.). Poichè dunque il triangolo ABC all'ugualmente alto ACD si ha, come la base BC a CD, e l'altro DCE all'ugualmente alto ACD, come la base EC a CA (*pr.* 1.); si avrà parimente BC a CD, come EC a CA (*pr.* 11. 5.).

Se poi dintorno agli angoli uguali BCA, ECD sia scambievolmente BC a CD, come EC a CA; perchè si ha come BC a CD, così il triangolo ABC ad ACD, e come EC a CA, così l'altro DCE ad ACD (*pr.* 1.); si avrà il triangolo ABC ad ACD, come l'altro DCE allo

stesso

stesso ACD (*pr.*11.5.). Per la qual cosa il triangolo ABC sarà uguale al triangolo DCE (*pr.*9.5.).

PROPOSIZIONE XVI.

Se quattro rette sieno proporzionali, il rettangolo delle estreme uguaglierà quello delle medie; e se due rettangoli sieno uguali, saranno compresi da quattro rette proporzionali, uno dalle estreme e dalle medie l' altro.

TAV.VIII. *Fig.* 3. Sia AB a CD, come CE ad AF. Sarà il rettangolo FB uguale ad ED.

Imperocchè per l' uguaglianza degli angoli retti A, C (*ass.*9.) i rettangoli FB, ED sono due parallelogrammi, che hanno un angolo uguale ad uno. Dintorno ad essi in oltre hanno i lati reciprocamente proporzionali. Dunque, sono uguali (*pr.*14.).

Sieno ora uguali. E poichè ne' parallelogrammi uguali l' angolo A è uguale a C; sarà il lato AB a CD, come CE ad AF (*pr.* 14.).

PROPOSIZIONE XVII.

Se tre rette sieno proporzionali, il rettangolo delle estreme sarà uguale al quadrato della media; e il lato del quadrato tra quei del rettangolo sarà medio proporzionale, se il rettangolo al quadrato sia uguale.

TAV.VIII. *Fig.* 4. Sia AB a CD, come CD ad AE. Sarà il rettangolo EB uguale al quadrato di CD.

Imperocchè per l' uguaglianza degli angoli retti A, C (*ass.*9.) il rettangolo EB ed il quadrato

drato di CD sono due parallelogrammi, che hanno un angolo uguale ad uno. Ed intorno a quelli hanno reciprocamente proporzionali i lati. Dunque sono uguali (*pr.* 14.).

Che se uguali sieno; essendo ne' due parallelogrammi uguali l' angolo A uguale a C; sarà il lato AB a CD, come CD ad AE (*pr.* 14.).

PROPOSIZIONE XVIII.

Sopra una data retta descrivere un rettilineo simile a un rettilineo dato e similmente posto.

Su la retta AB sia uopo descrivere un rettilineo simile al dato CE e posto similmente. Tav. VIII. *Fig.* 5.

Tirata la DF, si costituisca l' angolo A uguale a C, ABG a CDF, GBH ad FDE, e BGH a DFE (*pr.* 23. 1.). Il rettilineo AH sarà il richiesto.

Perciocchè i due angoli A, C sono uguali. Ed uguali sono i due ABG, CDF. Sicchè uguali saranno i restanti AGB, CFD (*cor.* 4. *pr.* 32. 1.). Si aggiungano a quelli gli uguali GBH, FDE, agli altri gli altri uguali BGH, DFE. Ed uguali saranno gli angoli ABH, CDE, non meno che gli altri AGH, CFE (*as.* 2.). Uguali di più sono i rimanenti H, E. Dunque i rettilinei AH, CE saranno equiangoli. Or ne' triangoli equiangoli GAB, FCD si ha GA ad AB, come FC a CD; negli altri HGB, EFD si ha BH ad HG, come DE ad EF (*pr.* 4.); ed essendo ne' primi AB a BG, come CD a DF, e BG a BH, come DF a DE negli altri; esser dee ordinando AB a BH, come CD a DE

a DE (*pr.* 22. 5.). Pertanto i rettilinei AH, CE avranno in oltre proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali. Quindi saranno simili (*def.* 1.). Ed i lati omologhi hanno in ambidue l'ordine medesimo. Per la qual cosa saranno ancora similmente posti.

PROPOSIZIONE XIX.

I triangoli simili sono tra se in ragione duplicata de' lati omologhi.

TAV. VIII. *Fig.* 6. Sieno tra se simili i triangoli ABC, DEF. Tra se saranno in duplicata ragione de' lati omologhi BC, EF.

Imperocchè per la somiglianza di essi l'angolo B è uguale ad E, ed il lato AB a BC, come DE ad EF (*def.* 1.), o permutando AB a DE, come BC ad EF (*pr.* 16. 5.). Se però si faccia come BC ad EF, così EF a BG (*pr.* 11.); esser dee AB a DE, come EF a BG (*pr.* 11. 5.). Condotta adunque la GA, i triangoli ABG, DEF e saranno tra se uguali (*pr.* 15.), e costituiranno ragioni simili col triangolo ABC (*pr.* 7. 5.). Ora il triangolo ABC all' ugualmente alto ABG ha la ragione di BC a BG (*pr.* 1.). Sicchè nella ragione medesima di BC a BG sarà il triangolo ABC a DEF (*pr.* 11. 5.). Ma per la continua proporzione delle tre BG, EF, BG la ragione di BC a BG è duplicata dell' altra di BC ad EF (*n.* 27. *cor.* 2. *l.* 5.). Dunque il triangolo APC sarà al simile DEF in ragione duplicata di quella, che ha il lato BC all' omologo EF.

PRO-

PROPOSIZIONE XX.

I poligoni simili e si risolvono in triangoli uguali di numero, simili tra se, e proporzionali a' loro tutti; e seguono de' lati omologhi la duplicata ragione.

Sia il poligono ACE simile ad FHK. Ed essendo il medesimo in ambidue degli angoli il numero; il medesimo altresì sarà e quello delle rette, che da un angolo agli opposti si potranno in essi tirare; e quello de' triangoli, ne' quali tirate tali rette ci si risolveranno. Tav.VIII. *Fig.* 7.

Essendo in oltre l'angolo B uguale a G, ed il lato AB a BC, come FG a GH (*def.* 1.); i triangoli ABC, FGH saranno tra se equiangoli (*pr.* 6.). Pertanto dintorno agli angoli uguali avranno proporzionali i lati (*pr.* 4.); e saranno pertanto tra se simili (*def.* 1.). Tolti poi gli angoli uguali BCA, GHF dagli uguali BCD, GHI, uguali rimangono gli angoli ACD, FHI: ed avendosi per la somiglianza de' primi triangoli AC a CB, come FH ad HG, e CB a CD, come HG ad HI per la somiglianza de' poligoni; aver si dee ordinando AC a CD, come FH a HI (*pr.* 22. 5.). Laonde anche l'altro triangolo ACD all'altro FHI ed equiangolo sarà e simile. Nella maniera medesima simili si dimostrano i rimanenti ADE, FIK. Sicchè i triangoli, ne' quali i poligoni simili si risolvono, simili tra se saranno.

Conciossiachè però nella duplicata ragione stessa di AC ad FH si ha ed il triangolo ABC ad

ad FGH, e l' altro ACD ad FHI (*pr.* 19.); si avrà il triangolo ABC ad FGH, come ACD ad FHI (*pr.*11.5.): e si avrà di più il triangolo ACD ad FHI, come ADE ad FIK; conciossiachè questi, non meno che gli altri sono nella stessa duplicata ragione di AD ad FI. Per la qual cosa il triangolo ABC sarà ad FGH, come il poligono ACE al simile FHK (*pr.* 12. 5.)

Or come la ragione duplicata del lato AB all' omologo FG, è così il triangolo ABC ad FGH. Così adunque sarà parimente il poligono ACE al simile FHK (*pr.* 11.5.).

PROPOSIZIONE XXI.

I rettilinei simili al medesimo sono tra se simili.

TAV.VIII. Fig. 8. Al rettilineo C sia simile ed il primo A, e l'altro B. Sarà A simile a B.

Imperocchè i due rettilinei A, B, non altrimenti che i due B, C per la loro somiglianza hanno ciascun angolo uguale a ciascuno, e intorno ad essi i lati proporzionali (*def.* 1.). Paragonati adunque tra di se i due A, B, in questi altresì e ciascun angolo si ritroverà uguale a ciascuno (*as.* 1.), e proporzionali si ritroveranno i lati dintorno agli angoli uguali (*pr.*11.5.); onde questi altresì tra se simili saranno (*def.*1.).

PROPOSIZIONE XXII.

I rettilinei simili e similmente descritti su dè lati proporzionali costituiscono proporzione; siccome la costituiscono i lati dè rettilinei proporzionali, simili

simili, e descritti similmente su di essi.

Sieno simili e posti similmente sopra A, B i rettilinei M, N; sopra C, D i rettilinei O, P. Se si abbia A a B, come C a D; si avrà M ad N, come O a P: e se vicendevolmente si abbia M ad N, come O a P; si avrà A a B, come C a D. Tav.VIII Fig. 9.

Perocchè uguali tra se sono le duplicate, non meno che le ragioni sudduplicate di ragioni uguali (*nn.* 27. e 28. *cor.* 2. *l.* 5.). Ma le ragioni de' rettilinei M ed N, O e P sono duplicate di quelle de' lati A e B, C e D; e queste delle prime sono sudduplicate (*pr.* 20.). Se A pertanto sia a B, come C a D; sarà M ad N, come O a P: e se sia scambievolmente M ad N, come O a P; sarà A a B, come C a D.

PROPOSIZIONE XXIII.

La ragione de' parallelogrammi equiangoli è quella, che de' lati si compone.

Sieno in B equiangoli i parallelogrammi AC, DE; tal che posti per diritto i lati AB, BE, debbano anche gli altri CB, BD giacere a dirittura (*pr.* 14. 1.). Se si faccia AB a BE, come una retta qualunque M ad N, e CB a BD, come N ad O (*pr.* 12.); la ragione del parallelogrammo AC a DE sarà quella di M ad O, la quale cioè si compone delle due di M ad N, e di N ad O (*n.* 13. *cor.* 2. *l.* 5.), o delle due di AB a BE, e di CB a BD. Tav.VIII Fig. 10.

Perocchè distesi i lati GC, HE, finchè s'incontrino in F, sarà il parallelogrammo AC all'

ugualmente alto BF, come la base AB a BE (*pr.* 1.), o come M ad N (*pr.* 11. 5.). Sarà parimente il parallelogrammo BF all'ugualmente alto DE, come la base CB a BD, o vero come N ad O. Per la qual cosa ordinando sarà il parallelogrammo AC all'equiangolo DE, come M ad O (*pr.* 22. 5.).

PROPOSIZIONE XXIV.

I parallelogrammi intorno al diametro di un altro e all'altro sono simili, e tra di se.

TAV.VIII. *Fig.* 11. Dintorno al diametro AC del parallelogrammo DB esistano i due parallelogrammi EG, HF. Saranno questi e al tutto DB, e tra se simili. Imperciocchè ne' parallelogrammi EG, DB l'angolo EAG è comune; i due EIG, DCB uguali all'opposto EAG sono uguali (*pr.* 34. 1.); e per le parallele EI, DC uguali sono i due AEI e D, non altrimenti che i due AGI e B per le parallele GI, BC (*pr.* 29. 1.). Dunque i parallelogrammi EG, DB sono equiangoli. Quindi è chiaro, che equiangoli parimente sieno i triangoli AEI, ADC, ed AGI, ABC. E quindi sarà in quelli AE ad EI, come AD a DC; in questi AG a GI, come AB a BC (*pr.* 4.). Essendo di più ne' primi EI ad IA, come DC a CA, ed IA ad IG, come CA a CB negli altri; è ordinando EI ad IG, come DC a CB (*pr.* 22. 5.). Sicchè i parallelogrammi equiangoli EG, DB avranno proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali. Laonde saranno simili (*def.* 1.). Nella maniera stessa simili

mili si dimostrano i due HF, DB. Dunque i due EG, HF ancor essi simili saranno (*pr.*21.).

PROPOSIZIONE XXV.

Dati due rettilinei costituirne un terzo simile ad uno, uguale all' altro.

Sia uopo descrivere un rettilineo simile al dato A, uguale al dato B. TAV.VIII. Fig. 12.

Distesa la retta CD verso F, si applichi alla stessa CD il parallelogrammo CE uguale ad A, ed alla retta DE nell' angolo EDF il parallelogrammo FE uguale a B (*pr.*44. e 45. 1.); tra le due CD, DF si trovi la media proporzionale GH (*pr.* 13.); e su la GH si descriva il rettilineo I simile ad A e similmente posto (*pr.*18.). Questo sarà il richiesto.

Imperocchè essendo il rettilineo A ad I in ragione duplicata di CD a GH (*pr.* 20.); per la proporzione continua delle tre CD, GH, DF si avrà A ad I, come CD a DF (*n.* 15. *cor.* 2. *l.* 5.), o come il parallelogrammo CE all'ugualmente alto FE (*pr.* 1.). Ma per l' uguaglianza di CE ed A, di FE e B il parallelogrammo CE è ad FE, come A a B. Si avrà pertanto il rettilineo A ad I, come lo stesso A a B (*pr.*11.5.); onde I sarà uguale a B (*pr.*9.5.).

PROPOSIZIONE XXVI.

I parallelogrammi simili, che hanno un angolo comune, hanno comune il diametro.

Sieno simili i parallelogrammi DB, EG, ed esista- TAV.VIII. Fig. 13.

esistano intorno al medesimo angolo DAB. Esisteranno ambidue intorno alla diagonale medesima AFC.

Altrimenti se del parallelogrammo DB la diagonale sia AIC; tirata per I la IH parallela ad AB (*pr.* 31. 1.), si avranno i parallelogrammi DB, HG tra se simili (*pr.* 24.). Si avrà dunque AB ad AD, come AG ad AH. Si ha però AB ad AD, come AG ad AE per la somiglianza de' parallelogrammi DB, EG. Sicchè si avrà AG ad AH, come AG ad AE (*pr.* 11. 5.); e perciò AH sarà uguale ad AE (*pr.* 9. 5.). La qual cosa ripugnando, ripugna che i parallelogrammi DB, EG non esistano intorno alla medesima diagonale AFC.

PROPOSIZIONE XXVII.

De' parallelogrammi adattabili alle parti di una retta, i quali da' corrispondenti parallelogrammi adattati alla retta intera manchino di un parallelogrammo simile a un dato e similmente posto, quello, che alla metà si adatta, è il massimo.

TAV.VIII. *Fig.* 14. Sia la retta AB segata per mezzo in C, ed alla metà AC sia adattato il parallelogrammo AD, mancante dall'intero AE di un altro CE simile al dato X e similmente posto. Sarà AD il massimo de' parallelogrammi adattabili alle parti della retta AB, e mancanti da' loro interi di un parallelogrammo simile ad X.

Imperciocchè presa la parte AF maggiore di AC, e condotta per F la FG parallela a BE, che segherà il diametro DB in H, per H si con-

conduca la IK parallela ad AB (*pr.* 31. 1.). E poichè i parallelogrammi CE, FK esistono intorno allo stesso diametro DB; saranno tra se simili (*pr.* 24.). Ma il primo è simile ad X. Dunque anche l'altro. Per la qual cosa il parallelogrammo AH adattato alla parte AF mancherà dal suo intero AK di un parallelogrammo simile ad X. Ora per l' uguaglianza de' compimenti CH, HE si ha CK uguale ad FE; e per l' uguaglianza delle basi CB, CA si ha lo stesso CK uguale a CI. Sarà pertanto CI uguale ad FE; ed aggiunto CH sarà AH uguale allo gnomone LMN. CE però è maggiore di LMN, e quindi di AH. Sicchè AD uguale a CE sarà ancor esso di AH maggiore. Nè altrimenti si dimostrerà AD maggiore di ogni parallelogrammo adattato ad ogni altra parte maggiore di AC.

Presa poi la parte AO minore di AC, si compia la figura. E poichè i parallelogrammi CE, OQ posti intorno al diametro comune PB sono simili, come CE ad X, allo stesso X così sarà simile OQ; onde dall' intero AQ mancherà AP di un parallelogrammo simile al dato. Poichè in oltre uguali sono e i compimenti DO, DQ, ed i parallelogrammi DR, DQ su le basi uguali DS, DE; sarà DO uguale a DR; onde come DR, sarà così DO maggiore di PS. Aggiunto adunque il comune OS, sarà AD maggiore di AP. Nel modo medesimo si dimostra AD maggiore di tutti i parallelogrammi adattabili alle parti minori di AC. Per la qual cosa sarà il massimo.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Adattare ad una parte di una retta data un parallelogrammo, che dal suo intero manchi di un altro simile a un dato, e che uguagli un dato rettilineo non maggiore del parallelogrammo adattabile alla metà della retta stessa, e mancante dall'intero suo di un parallelogrammo simile allo stesso dato.

TAV.VIII. *Fig.*15. Sia la retta AB, il parallelogrammo X, il rettilineo C, che abbia l'esposta condizione; e ad una parte di AB adattar si debba un parallelogrammo uguale a C, che dall' intero manchi di un altro parallelogrammo simile ad X.

Segata per mezzo la retta AB in D (*pr.* 10. 1.), e descritto su la DB il parallelogrammo DF simile ad X (*pr.* 18.), si compia l' intero AF. Se il rettilineo C sia uguale ad AE adattato alla metà AD, e di DF mancante da AF; si sarà sciolto il problema. Se poi C sia minore di AE, e quindi di DF; sopra la DB nell'angolo BDE si costituisca un parallelogrammo uguale a C (*pr.* 44. e 45. 1.); e quello tolto da DF, si faccia del rimanente un parallelogrammo simile al medesimo DF (*pr.* 25.), che posto accanto all'angolo DEF giacer dovrà accanto al diametro EB (*pr.* 26.). Sia questo GH, e di esso il lato GO si prolunghi in I e K, il lato HO in P. Il parallelogrammo AO adattato alla parte AP sarà il richiesto.

Perciocchè essendo tra se uguali i compimenti DO, OF; se ad ambidue si aggiunga PK, sarà

farà DK uguale a PF. E DK è uguale a DI per l'uguaglianza delle basi DB, DA. Sicchè DI farà uguale a PF; ed aggiunto DO, farà AO uguale allo gnomone NML. Questo però differisce da DF di GH: Di GH adunque differirà AO da DF. Ma dello stesso GH differisce da DF il rettilineo C. Per la qual cosa a C farà uguale il parallelogrammo AO, che dall'intero AK manca di PK simile a DF (*pr.* 24.), e quindi ad X (*pr.* 21.).

PROPOSIZIONE XXIX.

Ad una data retta distesa, quanto è uopo, adattare un parallelogrammo uguale a un dato rettilineo, il quale ecceda quello, che sopra la retta data si descrive, di un parallelogrammo simile a un dato.

Sia la retta AB, il rettilineo C, ed il parallelogrammo X; e debbasi alla AB prolungata adattare un parallelogrammo uguale a C, ed eccedente quello, che si descrive sopra AB, di un altro simile ad X. TAV. VIII. *Fig.* 16.

Divisa per metà in D la retta AB (*pr.* 10. 1.), si faccia su la DB il parallelogrammo DF simile ad X (*pr.* 18.); si distenda la DB verso H, e fatto su la BF nell'angolo HBF un parallelogrammo uguale a C (*pr.* 44. e 45. 1.), di questo insieme con DF si costituisca il parallelogrammo IG simile allo stesso DF (*pr.* 25.), che posto nell'angolo DEF star dovrà intorno al diametro EB (*pr.* 26.); si prolunghi la FB in

in O, e si compia il parallelogrammo AK. Questo sarà il richiesto.

Perciocchè essendo tra se uguali ed i compimenti IB, BG, ed i parallelogrammi IB, IA fatti su le basi uguali DB, DA; sarà IA uguale a BG; ed aggiunto DK, sarà AK uguale allo gnomone LMN. Essendo però C insieme con DF uguale ad IG; lo gnomone LMN esser dee uguale a C. Dunque allo stesso rettilineo C sarà anche uguale il parallelogrammo AK, che eccede l'altro AO descritto su la data AB del parallelogrammo OH simile a DF (*pr.* 24.), e perciò simile ad X (*pr.* 21.).

PROPOSIZIONE XXX.

Segare una data retta in ragione media ed estrema.

TAV. VIII. *Fig.* 21 Sia uopo segare in media ed estrema ragione la data AB.

Descritto di AB il quadrato AC (*pr.* 46. 1.), al lato AD si adatti il parallelogrammo DE uguale ad AC, ed eccedente DF di AE simile al medesimo AC (*pr.* 29.). Si avrà in F la richiesta sezione.

Imperocchè essendo DE uguale a DB; tolto DF, resterà AE uguale ad FC. Ma AE, perchè simile ad AC, è quadrato. Essendo pertanto il quadrato AE, uguale al rettangolo FC; sarà BC ad AF, come AF ad FB (*pr.* 17.). E nel quadrato AC è BC uguale ad AB. Sicchè sarà AB ad AF, come AF ad FB.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXI.

Nel triangolo rettangolo la figura del lato, che all' angolo retto si oppone, uguaglia le simili e descritte similmente sopra i lati, che lo comprendono.

Nel triangolo ABC rettangolo in A sieno su de' lati similmente descritte le figure simili D, E, F. Sarà la sola D uguale alle due E ed F. TAV.VIII. *Fig.* 18.

Imperocchè se dall' angolo retto A su la base BC si abassi la perpendicolare AG (*pr.* 12. 1.); si avrà BC a BA, come BA a BG, e BC a CA, come CA a CG (*cor.pr.* 8.). Or essendo le figure simili in duplicata ragione de' lati omologhi (*pr.*20.); esser dee D ad F, come BC a BG, e D ad E, come BC a CG (*n.* 15. *cor.* 2. *l.* 5.). Come adunque la sola BC uguaglia le due BG e CG, la sola D così uguaglierà le due F, ed E.

PROPOSIZIONE XXXII.

Se due triangoli, che hanno due lati proporzionali a due, secondo un angolo così si compongano, che i lati omologhi sieno tra se paralleli; avranno i rimanenti lati nella medesima direzione rettilinea.

Ne' triangoli ABC, DCE composti all' angolo ACD sia AB ad AC, come DC a DE, e di più paralleli tra se sieno, e i due lati AB, DC, e i due AC, DE; i rimanenti due BC, CE giaceranno a dirittura. TAV.VIII. *Fig.* 19.

Perciocchè essendo tra le parallele AB, DC l'an-

l'angolo A uguale all' alterno ACD, e l' altro D uguale allo ſteſſo ACD tra le parallele AC, DE (*pr.* 29. 1.); ſarà l' angolo A uguale a D. Si ha in oltre AB ad AC, come DC a DE. Sicchè l'angolo DCE ſarà uguale a B (*pr.* 6.). E l' altro ACD è uguale ad A. Dunque l'intero ACE uguaglierà i due B ed A; ed aggiunto il comune ACB, ſaranno i due ACE, ACB uguali a i tre B, A ed ACB. Or queſti uguagliano due retti (*pr.* 32. 1.). Dunque ancor quelli. Laonde nella ſteſſa direzione rettilinea giaceranno i lati BC, CE (*pr.* 14. 1.).

PROPOSIZIONE XXXIII.

Ne' cerchi uguali gli angoli a' centri, o alle circonferenze ſeguono la ragione degli archi, su de' quali ſtanno, non altrimenti che i ſettori.

TAV.VIII. Fig. 20. Su gli archi BI, EL de' cerchi uguali ABC, DEF ſtiano a' centri gli angoli BGI, EHL, alle circonferenze gli altri A, D. Sarà come l' arco BI ad EL, così l' angolo BGI ad EHL, e l' altro A a D, ed anche il ſettore GBI ad HEL.

Imperocchè preſi gli archi IK, KC uguali a BI, ed LF uguale ad EL, ſe ſi conducano i raggi GK, GC, HF; ſaranno tra se uguali ed i tre angoli BGI, IGK, KGC, ed i due EHL, LHF (*pr.* 27. 3.); onde l'angolo BGC tanto di BGI ſarà moltiplice, quanto BC di BI, e l' altro EHF di EHL, quanto EF di EL. Se però l' arco BC è uguale ad EF, eſſer dee l' angolo BGC uguale ad EHF; e ſe BC è maggiore di EF, o mi-

o minore, dee parimente l' angolo BGC esser maggiore, o minore di EHF (*pr.* 27. 3.). Si avrà pertanto l' angolo BGI ad EHL, come l' arco BI ad EL (*def.* 4. 5.).

E gli angoli A e D, perchè metà di BGI ed EHL (*pr.* 20. 3.), sono ad essi proporzionali (*pr.* 15. 5.). Come adunque BI ad EL, si avrà così A a D (*pr.* 11. 5.).

Or condotte le corde BI, IK, KC tra se uguali per l' uguaglianza degli archi, e fatti gli angoli M,N,O uguali ancor essi per l'uguaglianza de' compimenti alla circonferenza BAI, IAK KAC, si hanno le porzioni simili BMI, INK, KOC descritte sopra corde uguali, e perciò tra se uguali (*pr.*24.3.). Essendo pertanto uguali altresì i triangoli GBI,GIK,GKC per l'uguaglianza e de' raggi, e degli angoli compresi da' raggi stessi (*pr.*4.1.); uguali saranno i settori BIG, IKC,KCG. Quindi l'intero BCG tanto di BIG sarà moltiplice, quanto l'arco BC di BI; e quanto l'arco EF di EL, altrettanto per la ragione medesima sarà moltiplice il settore EFH di ELH. E' chiaro però, che dato l' arco BC uguale ad EF, dar si debba il settore BCG uguale ad EFH; e dato l' arco BC maggiore di EF, o minore, debbasi dare il settore BCG maggiore parimente o minore di EFH. Per la qual cosa sarà il settore BIG ad ELH, come l'arco BI ad EL (*def.*4.5.).

Ma come l'arco BI ad EL, si ha così l'angolo BGI ad EHL. Come dunque l' angolo BGI ad EHL, così si avrà il settore BIG ad ELH (*pr.*11.5.).

Corol.I. Se nel cerchio sia un diametro perpendicolare all'altro, tal che sopra le parti quarte

della

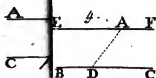
della circonferenza si abbiano al centro quattro angoli retti; a questi insieme sarà un retto solo, come alla circonferenza il quadrante, e a quel solo un angolo qualunque al centro stesso, come al quadrante l'arco, che a quell'altr'angolo si oppone. Sicchè ordinando un angolo qualunque al centro è a quattro retti, come l'arco, sul quale ei sta, alla circonferenza.

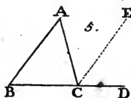
II. Se poi in due cerchi disuguali sieno a' centri due angoli uguali; ciascun di essi sarà a quattro retti, come l'arco, sul quale ciascuno sta, alla propria circonferenza. Poichè dunque la ragione de' due angoli uguali a quattro retti è la medesima; la medesima altresì sarà quella degli archi alle circonferenze. E gli archi proporzionali alle circonferenze si dicono *Simili*. Sicchè simili sono gli archi, su de' quali stanno angoli uguali a' centri di cerchi disuguali.

III. Finalmente poichè l' arco del cerchio, che nel vertice di un angolo ha il centro, e tra' lati si distende, è la più semplice delle linee, che secondo la grandezza proporzionalmente all' angolo medesimo corrisponda; riguardar si può, qual misura di esso. Laonde se la circonferenza, si concepisca divisa in *gradi*, o in parti uguali 360, e ogni grado in *minuti*, o in parti uguali 60, e ogni minuto in altre 60 parti uguali, o *secondi*, e così seguentemente; si stimerà l'angolo di altrettanti gradi, e minuti, quanti ne ha l'arco, che lo misura.

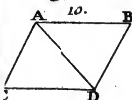
F I N E

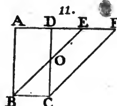
Del Tomo I.


A
E
4.
A
F
C
B
D
C

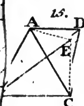

A
E
5.
B
C
D

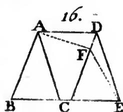

C
6.
A


A
10.
B
D


A
D
11.
E
F
O
B
C

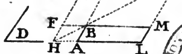

A
D
B
C


15.
A
D
E
C

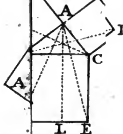

16.
A
D
F
B
C
E

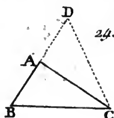

17.
A
B


C


20.
E
G
I
F
B
M
D
H
A
L


23.
H
A


I
C
A
L
E


D
24.
A
B
C



A. Zaballi f.

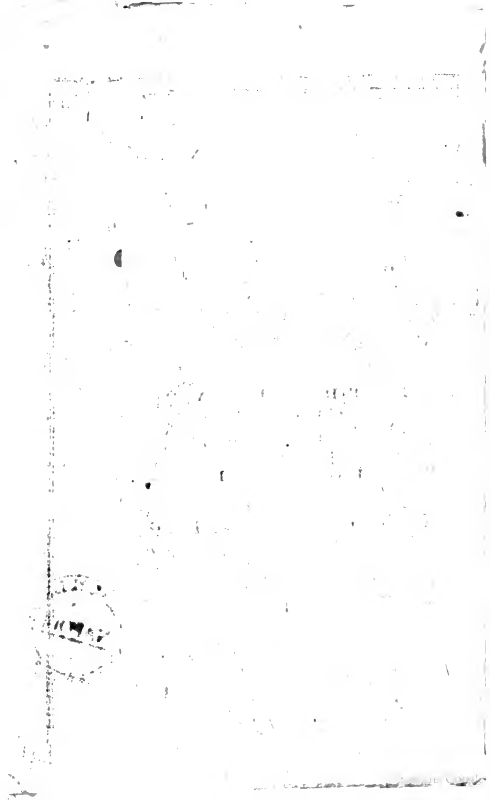
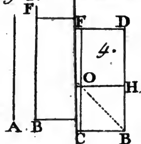
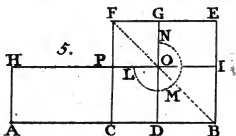
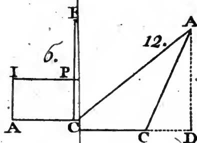
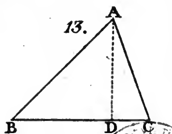


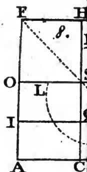
Fig. 1. Tav. III.

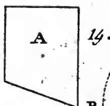

F
A B
F D
4.
O H
C B

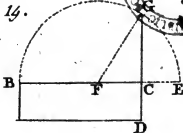

F G E
5.
N
H P O I
L
M
A C D B

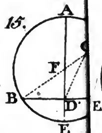

E
6.
I P
A C
12.
A
C D

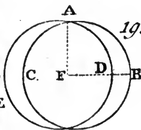

13.
A
B D C

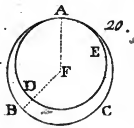

F H
8.
O L
I
A C

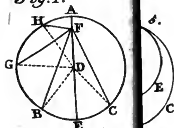

A


14.
G
B F C E
D

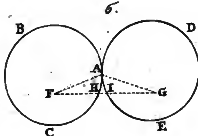

15.
A
F
B D E
E

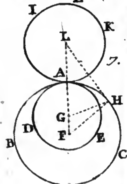

A
19.
C. F D B


A
20.
E
F
D
B C

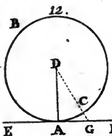

Fig. 1.
A
H
F
G
D
B
E
C

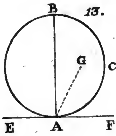

5.
E
C

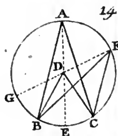

6.
B
D
A
F
H
I
G
C
E


I
K
L
7.
A
H
G
D
F
E
B
C

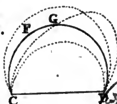


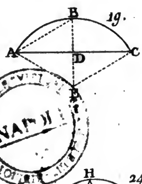

12.
B
D
C
E
A
G
F


B
13.
G
C
E
A
F

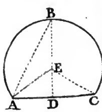

A
14.
F
D
G
B
E
C

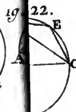


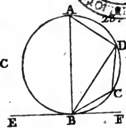

18.
F
G
C


B
19.
A
C
D
E




B
E
A
D
C


19.
22.
E
A
C


A
D
C
E
B
F

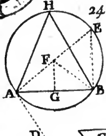
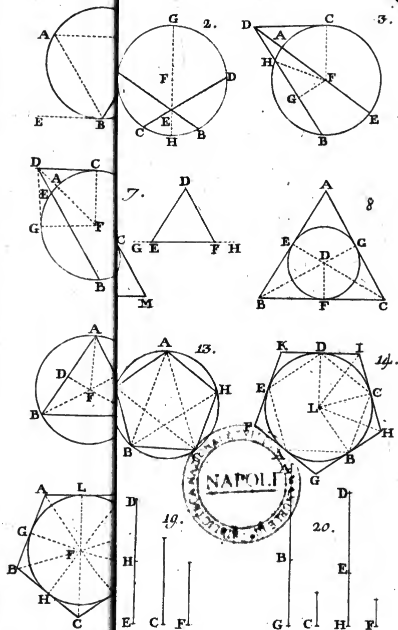
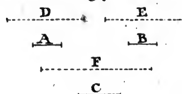

H
24.
E
F
A
G
B
D
C

Fig. 1.

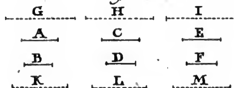
Tav. V.


2.
3.
7.
8
13.
14.
19.
20.
A B E
G D F E C H B
D C A H F G E B
D C A E G F B
C M
D G E F H
A E G D B F C
A D F B
A H B K
K D I E C L H F A B G
A L G F B H C
D H E C F
B G C
D E H F
NAPOLI

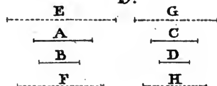
5.



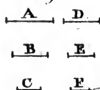
9.



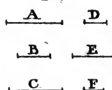
15.



17.



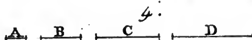
18.

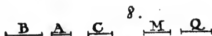


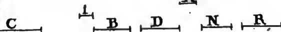


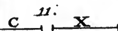
22.



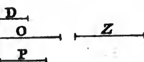

4.
A
B
C
D

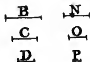

8.
B
A
C
M
Q

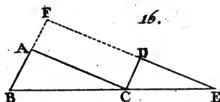

X
C
I
B
D
N
R

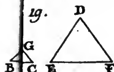

11.
C
X

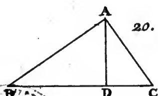

12.
A
M

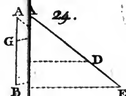

D
O
Z
P


B
N
C
O
D
P

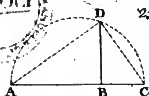

16.
F
A
D
B
C
E


19.
D
G
B
C
E
F


A
20.
B
D
C


A
24.
G
D
B
E




D
25.
A
B
C



